ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

КАЧКОВСКИЙ Илья Васильевич

ОТСУТСТВИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

специальность 01.01.03 — математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Филонов Н. Д.

Санкт-Петербург
2013

Оглавление

Введение

Операторы Шрёдингера с периодическими потенциалами

Работа посвящена исследованию спектра периодических операторов Шрёдингера. Простейшим примером является оператор

$$H = -\Delta + V(x) \tag{1}$$

в $L_2(\mathbb{R}^d)$, где V периодичен относительно некоторой решетки

$$\Gamma = \{l_1 b_1 + \ldots + l_d b_d, \quad l_j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^d,$$

$b_1, \ldots, b_d$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^d$. Точное определение оператора дано в §1.2.1.

Оператор (1) является простейшей моделью физики твердого тела, описывающей поведение электрона в периодическом электрическом потенциале V. Эта модель, по-видимому, впервые была рассмотрена Феликсом Блохом в 1929 году в [8]. Он обнаружил, что уравнение $Hu = Eu$ имеет решения вида

$$He^{i\langle\xi,x\rangle}u_{n,\xi}(x) = E(n,\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}u_{n,\xi}(x),$$

где ξ принадлежит элементарной ячейке двойственной решетки, а $u_{n,\xi}(x)$ — Γ-периодические собственные функции некоторого вспомогательного оператора. Более подробно см., например, [2, Глава 8].

Математически строгая спектральная теория оператора H была построена в [1], см. также [47, 29]. Оператор H унитарно эквивалентен прямому интегралу

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus H(\xi)\, d\xi,$$

где $\widetilde{\Omega}$ — элементарная ячейка решетки, двойственной к Γ, а

$$H(\xi) = (\nabla_y + i\xi)^*(\nabla_y + i\xi) + V(x) \tag{2}$$

— семейство операторов в $L_2(\Omega)$, где

$$\Omega = \{y_1 b_1 + \ldots + y_d b_d, \quad 0 \leqslant y_i < 1\}$$

— элементарная ячейка решетки Г. Точные формулировки приведены в §1.2.2. Спектры операторов $H(\xi)$ дискретны, их собственные значения $E(n, \xi)$ зависят от ξ как от параметра. Спектр оператора H, таким образом, представляет собой объединение отрезков (областей значений $E(n, \xi)$), называемых спектральными зонами.

В случае $d = 1$ оператор H представляет собой обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка с периодическими коэффициентами. Изучение таких операторов началось значительно раньше, см. [58, 53, 24].

Зонная структура спектра имеет место не только для оператора (1), но и для любого периодического эллиптического оператора. Однако, общая теория не исключает ситуации, когда какая-то зона «схлопывается» в точку (соответствующая функция $E(n, \xi)$ равна константе). Тогда у оператора кроме абсолютно непрерывного спектра возникает бесконечнократное собственное значение. Нашей целью является доказательство отсутствия таких собственных значений у различных операторов Шрёдингера.

Обзор известных результатов об абсолютной непрерывности спектра

Из анализа одномерного оператора (см., например, [45]) следует, что все его спектральные зоны невырождены, и спектр является чисто абсолютно непрерывным. В многомерном случае абсолютная непрерывность спектра также является естественной гипотезой. Оператор (1) определяется квадратичной формой

$$h[u, u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^d} V(x) |u(x)|^2 \, dx, \tag{3}$$

заданной на пространстве Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$. Ясно, что потенциал V определяется своими значениями на ячейке Ω. В шкале пространств L_p оптимальным условием на потенциал, при котором квадратичная форма (3) задает самосопряженный оператор, является $V \in L_{d/2}(\Omega)$ при $d \geqslant 3$ и $V \in L_p(\Omega)$, $p > 1$, при $d = 2$. Рассматриваются также и более широкие классы (в основном пространства Лоренца $L^0_{p,\infty}$), но мы для простоты будем формулировать все результаты в терминах пространств L_p.

1. Оператор во всем пространстве. Впервые в случае $d = 3$, $V \in L_2(\Omega)$ абсолютная непрерывность спектра была установлена Томасом в 1973 году в работе [47]. В книге [29] результат обобщен на случай $V \in L_2(\Omega)$ при $d = 2, 3$ и $V \in L_p(\Omega)$, $p > d - 1$, при $d \geqslant 4$. В случае $d = 2$ абсолютная непрерывность была установлена для $V \in L_p(\Omega)$, $p > 1$, в работе [5]. В случае $d \geqslant 3$ достигнуть оптимального показателья $p = d/2$ оказалось сложнее. В работе [6] условие было ослаблено до $p = \max\{d/2, d-2\}$ при $d \geqslant 3$, а при оптимальном (в шкале L_p) условии $V \in L_{d/2}(\Omega)$, $d \geqslant 3$, абсолютная непрерывность была установлена только в 2001 году в работе [30]. Позднее более простое (и применимое также к оператору с магнитным потенциалом) доказательство было предложено в [11]. В разделе 3.2.3 мы приводим доказательство из [11].

2. Двумерный случай. Особенно полные результаты получены в двумерном случае, см. [7, 59, 34, 35, 41]. В частности, в [59] рассмотрен оператор $H_{d=2}$, отвечающий квадратичной форме

$$h_{d=2}[u, u] = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x, y)|^2 \, dx \, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x, y)|^2 \, d\nu(x, y).$$

На периодический заряд $d\nu$ накладывается условие подчиненности. Ему, например, удовлетворяют заряды $d\nu$, такие что для любого положительного ε выполняется оценка

$$\int\limits_{\Omega} |u(x, y)|^2 \, |d\nu(x, y)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 \, dx \, dy + C(\varepsilon) \int\limits_{\Omega} |u(x, y)|^2 \, dx \, dy \quad \forall u \in H^1(\Omega);$$

в частности, этому условию удовлетворяют и «обычный» электрический потенциал, и сингулярный потенциал, обсуждаемый ниже. При таком условии спектр оператора $H_{d=2}$ абсолютно непрерывен. Результат в [59] получен и для всей плоскости, и для периодического волновода на плоскости (и, более того, для оператора с магнитным потенциалом). Мы будем в дальнейшем предполагать $d \geqslant 3$; наши методы работают и в двумерном случае, но соответствующие результаты уже покрыты в указанных работах.

3. Сингулярный потенциал. В ряде задач (например, в теории фотонных кристаллов — см. [50]) представляет интерес оператор Шрёдингера с δ-образным потенциалом

$$H_\sigma = -\Delta + \sigma(x)\delta_\Sigma(x),$$

где $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ — периодическая система гиперповерхностей, а σ — периодическая функция на Σ. Данный оператор также определяется с помощью квадратичной формы

$$h[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\,dx + \int\limits_{\Sigma} \sigma(x)|u(x)|^2\,dS(x); \tag{4}$$

оптимальным условием на σ в этом случае будет $\sigma \in L_{d-1}(\Sigma \cap \Omega)$ при $d \geqslant 3$. Двумерный случай полностью покрывается упомянутыми выше результатами. В случае $d \geqslant 3$ данный оператор рассматривался в работе [40]. Абсолютная непрерывность спектра H_σ установлена при $d = 3$, кусочно C^3-гладкой Σ и $\sigma \in L_2(\Sigma \cap \Omega)$. В [40] рассматривались и более высокие размерности, однако на (кусочно C^1-гладкую) поверхность Σ накладывалось дополнительное геометрическое условие — существование направления, трансверсального к Σ во всех её точках (такому условию удовлетворяют, например, многогранники, но не удовлетворяет сфера). В работе автора [15] рассмотрен случай $d = 4$, поверхность $\Sigma \in C^4$ подчинена другому геометрическому условию — гауссова кривизна Σ нигде не обращается в нуль (наоборот, подходит сфера, но не подходит многогранник; поверхность цилиндра не удовлетворяет ни условиям [40], ни условиям [15]). В настоящей диссертации мы получим результат, более общий, чем [15].

4. Оператор в многомерном цилиндре. В приложениях также встречается оператор Шрёдингера в многомерном цилиндре $\Xi = U \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^d$, где $U \subset \mathbb{R}^k$ — ограниченная область, $d = k + m \geqslant 3$; при $k = 1$ область Ξ — это плоско-параллельный слой. На границе $\partial\Xi$ возможны различные варианты краевых условий. Впервые данный оператор встречается в книге [20], там установлена абсолютная непрерывность его спектра при $V \in L_\infty(U \times \Omega)$. В неопубликованной работе [18] данное условие ослаблено до $V \in L_{2(d-2)}(U \times \Omega)$. В этих работах предполагалось, что $\partial U \in C^2$, на границе ставилось условие Дирихле или условие Неймана.

Мы рассмотрим также задачу с третьим краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \sigma(x,y)u(x,y), \quad (x,y) \in \partial U \times \mathbb{R}^m.$$

Соответствующий оператор определяется через квадратичную форму

$$h[u,u] = \int\limits_{\Xi} |\nabla u(x,y)|^2\,dx\,dy + \int\limits_{\Xi} V(x,y)|u(x,y)|^2\,dx\,dy + \int\limits_{\partial\Xi} \sigma(x,y)|u(x,y)|^2\,dS(x,y). \tag{5}$$

Из сравнения формул (4) и (5) ясно, что третье краевое условие можно трактовать как сингулярный электрический потенциал, сосредоточенный на границе, $\Sigma = \partial\Xi$. Такой оператор был изучен только в случае слоя $[0,1]\times\mathbb{R}^{d-1}$. В работе [42] установлено отсутствие собственных значений в спектре такого оператора для $\sigma \in L_2(\{0,1\}\times\Omega)$ при $d = 3$ и $\sigma \in L_{2d-2}(\{0,1\}\times\Omega)$ при $d \geqslant 4$, $V \in L_{\max\{d/2,d-2\}}([0;1]\times\Omega)$.

Схема Томаса

Схема, приведенная в [47], используется практически во всех работах по абсолютной непрерывности. Исключение составляют статьи [55, 54, 46], в которых предполагается, что потенциал обладает дополнительной симметрией (является четным). Мы излагаем эту схему в Главе 1. Основной идеей является изучение поведения собственных значений оператора (2) при изменении квазиимпульса ξ. Возможны два варианта. Если одно из собственных значений оператора $H(\xi)$ будет постоянным по ξ, то у исходного оператора H это собственное значение будет собственным значением бесконечной кратности. Если же таких собственных значений нет, то спектр будет абсолютно непрерывным. Таким образом, достаточно доказать отсутствие собственных значений, постоянных по ξ. Отметим, что в широких предположениях (см., например, [52]) доказано, что сингулярного спектра у подобных операторов не может быть.

Идея Томаса состоит в аналитическом продолжении операторного семейства $H(\xi)$ в комплексную область по одной из компонент ξ. Таким образом, рассматривается семейство $H(\xi_1 b_1 + \xi')$ при фиксированном $\xi' \perp b_1$. Для простоты будем предполагать, что $|b_1| = 1$. Данное семейство (см. §1.1.2) является голоморфным семейством типа (B) с компактной резольвентой (то есть с дискретным спектром). В силу аналитической альтернативы Фредгольма (теорема 1.1.17) достаточно доказать, что никакое фиксированное $\lambda \in \mathbb{C}$ не может быть собственным значением семейства при всех $\xi_1 \in \mathbb{C}$. Для этого рассматривается $\xi_1 = (\pi + i\tau)$ при больших вещественных τ и доказывается, что оператор $H(\tau) = H((\pi + i\tau)b_1 + \xi') - \lambda I$ обратим при любом фиксированном λ и достаточно больших τ. Последнее легко проверяется при $V = 0$, $\sigma = 0$: имеет место оценка

$$\|(H_0(\tau) - \lambda)^{-1}\| \leqslant (2\pi\tau)^{-1}, \quad \tau > 0, \tag{6}$$

где через $H_0(\tau)$ обозначен свободный оператор. Содержательная часть всех указанных результатов — доказательство того, что аналог оценки

(6) выполняется для оператора H (с потенциалами V и/или σ). Оно сводится (см. §1.2.3) к оценкам норм вида

$$\left\||V|^{1/2}|H_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|_{L_2(\Omega)}, \quad \left\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|_{L_q(\Sigma\cap\Omega)}, \quad q \geqslant 2, \tag{7}$$

через норму $\|u\|_{L_2(\Omega)}$. Именно доказательство последних оценок представляет основную техническую трудность. Отметим также, что легко устанавливается оценка

$$\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{L_2(\Omega)},$$

где $H^{1/2}$ – пространство Соболева-Слободецкого. Теоремы вложения сразу дают нужную оценку первой нормы в (7) при $V \in L_d(\Omega)$. Таким образом, в случае электрического потенциала борьба идет за улучшение показателя суммируемости. В случае сингулярного потенциала или третьего краевого условия нужны оценки следа $|H_0(\tau)|^{-1/2}u$ на подмногообразии. Однако, $H^{1/2}(\Omega)$ не вкладывается в $L_2(\Sigma \cap \Omega)$. Поэтому такие простые соображения не позволяют установить абсолютную непрерывность спектра *ни при каком* нетривиальном σ.

В случае обычного электрического потенциала основной идеей является анализ символа оператора H_0 и использование того факта, что разложение по собственным функциям оператора H_0 — это разложение в ряд Фурье функции на Ω; затем можно использовать те или иные свойства преобразования Фурье. В частности, является важным тот факт, что собственные функции оператора $H_0(\tau)$ равномерно ограничены в $L_\infty(\Omega)$ (это использовалось, например, в [6]). В работе [18] схема [6] была применена к оператору в цилиндре $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$ с произвольным сечением, однако это привело к ухудшению показателя до $2(d-2)$.

В случае сингулярного потенциала похожий метод позволяет получить оптимальный показатель в случае $d = 3$, см. [40]. При $d \geqslant 4$ приходится накладывать дополнительное геометрическое условие на Σ (существование трансверсального направления) даже при $\sigma \in L_\infty(\Sigma)$. При $d = 4$ это условие можно заменить условием необращения гауссовой кривизны Σ в нуль, см. [15].

Случай многомерного цилиндра с краевым условием третьего типа, по-видимому, является самым сложным из перечисленных. Здесь $\Sigma = \partial U \times \mathbb{R}^m$, никакое направление квазиимпульса не является трансверсальным к Σ, и гауссова кривизна Σ равна нулю. Таким образом, методы [40] и [15] не работают.

Основные результаты

В данной работе мы изучаем оператор

$$H = -\Delta + V(x) + \sigma(x)\delta_\Sigma(x) \tag{8}$$

в $L_2(\Xi; \mathbb{C}^N) = L_2(U \times \mathbb{R}^m; \mathbb{C}^N)$, где $U \subset \mathbb{R}^k$ — ограниченная область. Мы предполагаем, что $d = k + m \geqslant 3$ и не исключаем случай $k = 0$ (тогда $\Xi = \mathbb{R}^d$ — всё пространство). Наши методы работают и при $d = 2$, однако соответствующие результаты уже известны. Поверхность Σ, а также функции V и σ являюся периодическими относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$. Точное определение оператора см. в §1.2.1.

1. Сингулярный потенциал во всем пространстве. Пусть $k = 0$, $d = m \geqslant 3$. Мы доказываем (см. теорему 3.1.1), что у оператора (8) отсутствуют собственные значения при

$$V \in L_{d/2}(\Omega), \quad \sigma \in L_p(\Sigma \cap \Omega), \quad p > d - 1.$$

Предполагается, что Σ — C^d-гладкая Γ-периодическая система гиперповерхностей. Отличие теоремы 3.1.1 от предыдущих результатов в том, что не предполагается выполнения каких-либо дополнительных геометрических условий на Σ.

Основной идеей доказательства является использование $L_q(\Sigma)$-оценок спектральных проекторов оператора Лапласа на торе, полученных в [9]. В Главе 2 мы приводим доказательство этих оценок (теорема 2.1.1), следуя указанной работе. Результат [9] формулируется для $\Sigma \in C^\infty$; можно проследить, что фактически достаточно гладкости класса C^d, однако для этого пришлось восстанавливать подробности, изначально опущенные авторами.

Теорема 3.1.1 также верна для слоя и для цилиндра с прямоугольным сечением

$$U = [0; a_1] \times \dots [0; a_k]$$

с краевыми условиями Дирихле, Неймана или условием третьего типа. В этих случаях для учета обычного электрического потенциала V достаточно результатов [11]. В случаях слоя и прямоугольного цилиндра используется прием с отражением, позволяющий свести задачу к задаче с периодическими краевыми условиями.

2. Обычный электрический потенциал в цилиндре с сечением общего вида. Мы доказываем два результата. Первый — теорема 4.1.1. При $V \in L_{d-1}(U \times \Omega)$ у оператора (8) отсутствуют собственные значения;

мы предполагаем, что граница ∂U липшицева. Второй результат — теорема 4.1.2: в скалярном случае ($N = 1$) в предположении, что $\partial U \in C^\infty$, результат можно улучшить до $V \in L_p(U \times \Omega)$, $p > \max\{d/2, d-2\}$. Идея доказательства теоремы 4.1.1 в том, что норму элемента $|H_0(\tau)|^{-1/2}u$ можно сначала оценить в анизотропном пространстве Соболева (§4.2.2), а затем воспользоваться теоремами вложения. Теорема 4.1.2 доказывается аналогично теореме 3.1.1, однако здесь используются $L_q(\Omega)$-оценки спектральных проекторов оператора Лапласа, полученные в [31].

3. Оператор в многомерном круговом цилиндре. Пусть U — единичный шар в $\mathbb{R}^k$. Тогда собственные функции оператора $H_0(\tau)$ допускают явное описание в терминах специальных функций. Это позволило установить отсутствие собственных значений у оператора (8) в круговом цилиндре при $\sigma \in L_{4d-8}(\partial U \times \Omega)$, $V \in L_{d-1}(U \times \Omega)$ (теорема 5.3.1). В приложениях важен трехмерный случай $k = 2$, $m = 1$ для векторного оператора в $L_2(\Xi; \mathbb{C}^6)$ (теорема 5.4.1). Мы доказываем результат для общего случая оператора, действующего на дифференциальные p-формы, а затем сводим случай векторных полей к случаям $p = 0$, $p = 1$. Идея доказательства в случае p-форм состоит в том, чтобы оценить норму элемента $|H_0(\tau)|^{-1/2}u$ в некотором пространстве Соболева на $\partial U \times \Omega$ (оценка (5.9.8)), а затем снова воспользоваться теоремами вложения. Доказательство оценки (5.9.8) требует анализа следов на границе собственных p-форм оператора $H_0(\tau)$ (раздел 5.6). Ситуация осложняется тем, что в символ оператора входят нули функций Бесселя, для которых требуются некоторые оценки, равномерные по параметру ν (раздел 5.5). Отметим, что данное доказательство существенно использует сферическую симметрию сечения цилиндра и, по-видимому, не обобщается на сечения произвольной формы.

Оператор Максвелла

Приложением полученных результатов может служить исследование абсолютной непрерывности спектра оператора Максвелла, представляющей интерес для теории фотонных кристаллов (см., например, [21]). Пусть $\Xi = U \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^3$ — трехмерный цилиндр (U — область в $\mathbb{R}^2$, $m = 1$), плоско-параллельный слой ($U = [0; a]$, $m = 2$) или всё пространство ($\Xi = \mathbb{R}^3$). Пусть $\varepsilon, \mu \colon \Xi \to \mathbb{R}$ — Γ-периодические скалярные функции, такие что

$$0 < c_0 \leqslant \varepsilon, \mu \leqslant c_1 < \infty, \quad \varepsilon, \mu \in W^2_{3/2,\mathrm{loc}}(\Xi) \cap W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Xi)$$

для некоторого $p > 3$. Введем пространство

$$\mathcal{H} = \big\{(E,H) \in L_2(\Xi;\mathbb{C}^3) \oplus L_2(\Xi;\mathbb{C}^3)\colon \\ \operatorname{div}(\varepsilon E) = 0, \quad \operatorname{div}(\mu H) = 0, \quad H_n|_{\partial\Xi} = 0\big\},$$

где равенства нулю дивергенции понимаются в смысле теории распределений, а через H_n обозначена нормальная компонента вектора H. Функция E имеет смысл электрического поля в области Ξ, H — магнитное поле, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей Ξ. Оператор Максвелла (точнее, "сильный" оператор Максвелла) определяется матрицей

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon^{-1}\operatorname{rot} \\ -i\mu^{-1}\operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix}$$

на области определения

$$\operatorname{Dom}\mathcal{M} = \{(E,H) \in \mathcal{H}\colon \ E,H \in H^1(\Xi;\mathbb{C}^3), \ E_\tau|_{\partial\Xi} = 0\},$$

где через E_τ обозначена тангенциальная компонента вектора E. Граничные условия $E_\tau = 0$, $H_n = 0$ отвечают идеально проводящей границе $\partial\Xi$. При указанных условиях в случаях, если $\partial U \in C^2$ или U является выпуклой, оператор $\mathcal{M}$ будет самосопряженным. Более подробно см. [4, 25, 43, 28]. Поскольку коэффициенты ε, μ являются периодическими, также естественно ставить вопрос об абсолютной непрерывности его спектра. Оказывается, что для случая оператора во всем пространстве (см. [25]), а также в слое [43] и в трехмерном цилиндре [28] этот вопрос сводится к отсутствию собственных значений у некоторого матричного периодического оператора Шрёдингера в соответствующей области. При этом потенциал V не будет самосопряженным; кроме того, в случаях слоя и цилиндра при нетривиальных ε и μ появится дополнительный матричный сингулярный потенциал, сосредоточенный на $\partial\Xi$ (то есть краевое условие третьего типа). Именно этим мотивирован интерес к задачам с краевым условием третьего типа.

Открытые вопросы

Остается открытым вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора в многомерном цилиндре $U\times\mathbb{R}^m$ с произвольным (не прямоугольным и не круговым) сечением U в случае краевого условия третьего типа даже в случае $\sigma \in C^\infty(\partial U \times \Omega)$, $V = 0$. Предполагается, что σ нетривиально зависит от “периодических” переменных $y \in \mathbb{R}^m$, иначе результат следует из теоремы 4.1.1.

С физической точки зрения также важен оператор с магнитным потенциалом

$$H = (i\nabla - A(x))^*(i\nabla - A(x)) + V(x),$$

где $A\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $V\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — Γ-периодические функции. Пусть $d \geqslant 3$. При $A \in L_{d,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, $V \in L_{d/2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ оператор H, заданный квадратичной формой

$$h[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left\{ |(i\nabla - A(x))u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 \right\} dx,$$

будет самосопряжен и полуограничен снизу. Появление в операторе членов первого порядка – это возмущение, в определенном смысле, более сильное, чем сингулярный электрический потенциал. Вопрос об абсолютной непрерывности спектра данного оператора в двумерном случае изучался в [5], а в многомерном случае — в [33], см. также [22, 11]. Результаты, полученные нами для оператора во всем пространстве, допускают обобщение на случай оператора с магнитным потенциалом тем же способом, что и в [6, 40]; возмущения A и V можно рассматривать независимо. Однако в случае магнитного потенциала недостаточно ограничиться выбором b_1 в качестве направления аналитического продолжения $H(\xi)$, что приводит к загромождению формул. В случае же оператора в слое (и тем более в цилиндре) вопрос об абсолютной непрерывности открыт даже в случае $A \in C^\infty, V = \sigma = 0$ (при $d \geqslant 3$); сложность связана именно с ограниченностью возможных направлений ξ.

Другим, еще более сложным, обобщением является рассмотрение оператора с переменной метрикой, то есть оператора вида

$$H = (i\nabla - A(x))^* g(x)(i\nabla - A(x)) + V(x),$$

где g — Γ-периодическая матричнозначная функция, $0 < c_1 I \leqslant g(x) \leqslant c_2 I$. Некоторые результаты можно получить, если $g(x) = w(x)a$, где w — скалярная функция, a — постоянная матрица, см. [6]. Однако в случае гладкой метрики g общего вида при $d \geqslant 3$ вопрос также открыт. В работе [51] построен пример оператора с $g \in \cap_{\alpha<1} C^\alpha$ и $A = 0$, $V = 0$, имеющего собственное значение бесконечной кратности.

Структура работы

Глава 1 является вводной. В разделе 1.1 мы формулируем необходимые определения из теории операторов и аналитических семейств операторов. Для удобства читателей мы приводим доказательства некоторых фактов. Раздел 1.2 посвящен изложению схемы Томаса для секториальных операторов. Центральным местом Главы 1 является §1.2.3, в котором формулируются достаточные условия абсолютной непрерывности спектра и (в несамосопряженном случае) отсутствия собственных значений.

Глава 2 посвящена изложению доказательства теоремы 2.1.1 из [9]. Она нужна нам только для многомерного тора; в этом случае доказательство упрощается и не использует техники интегральных операторов Фурье. Нам также было важно проследить за тем, какому классу гладкости должна удовлетворять поверхность Σ.

Глава 3. Здесь используются результаты Главы 2 для доказательства отсутствия собственных значений у оператора с сингулярным потенциалом во всем пространстве и в прямоугольном цилиндре. В разделе 3.3 мы для удобства читателя приводим изложение части работы [11].

Глава 4. Мы доказываем теоремы 4.1.1 и 4.1.2, относящиеся к случаю оператора в многомерном цилиндре с произвольным сечением с обычным электрическим потенциалом.

Глава 5. В разделах 5.1 и 5.2 мы приводим необходимые сведения из теории дифференциальных форм. Результатами главы является теорема 5.3.1, а также специальный частный случай, описанный в разделе 5.4. В разделе 5.5 исследуются свойства нулей функций Бесселя. В разделе 5.6 мы приводим выражение для собственных p-форм оператора Лапласа в k-мерном шаре, заимствованное из [19]. В разделе 5.7 мы оцениваем их следы на границе. В разделе 5.8 доказывается несколько технических лемм о символе оператора. Наконец, в последнем разделе 5.9 доказывается теорема 5.3.1.

Глава 1

Схема Томаса доказательства абсолютной непрерывности спектра

Эта глава носит вводный характер. Все излагаемые здесь результаты известны, основные источники — [5, 14, 29].

Во втором разделе мы дадим точное определение рассматриваемых операторов Шрёдингера H и опишем теорию Флоке-Блоха разложения периодических операторов в прямой интеграл,

$$FHF^* = \int\limits_{\tilde{\Omega}} \oplus H(\xi)\, d\xi.$$

Операторы $H(\xi)$ секториальны и имеют дискретный спектр. Для доказательства отсутствия собственных значений в спектре H (абсолютной непрерывности H в самосопряженном случае) достаточно убедиться в отсутствии постоянных по ξ собственных значений $H(\xi)$. Мы сформулируем два достаточных для этого условия ($A(q)$ и $B(q)$, см. ниже §1.2.3). В ряде ситуаций в дальнейшем (главы 3, 4, 5) мы проверим выполнение условий $A(q)$ и $B(q)$ и, тем самым, установим отсутствие собственных значений соответствующих операторов.

В первом разделе собраны необходимые сведения из теории секториальных операторов и форм и их голоморфных семейств.

1.1 Вспомогательные результаты

1.1.1 Секториальные операторы и формы

Здесь и далее h — полуторалинейная форма в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с плотной областью определения $\operatorname{Dom} h$. Пусть

$$S(\gamma,\theta)=\{z\in\mathbb{C}\colon |\arg(z-\gamma)|\leqslant\theta\},\quad 0\leqslant\theta<\pi/2,\quad \gamma\in\mathbb{R}.$$

Определение 1.1.1. Форма h называется *секториальной*, если для некоторых $0\leqslant\theta<\pi/2$, $\gamma\in\mathbb{R}$

$$\{h[u,u]\mid u\in\operatorname{Dom} h, \|u\|=1\}\subset S(\gamma,\theta).$$

Определение 1.1.2. Секториальная форма h называется *замкнутой*, если для любой последовательности $\{u_n\}\in\operatorname{Dom} h$ из сходимостей

$$u_n\to u,\ u\in\mathcal{H},\quad h[u_n-u_m,u_n-u_m]\to 0,\ n,m\to\infty \tag{1.1.1}$$

следует, что $u\in\operatorname{Dom} h$, $h[u-u_n,u-u_n]\to 0$.

Определение 1.1.3. Секториальная форма h называется *замыкаемой*, если она допускает замкнутое продолжение. *Замыканием* формы h называется минимальное замкнутое продолжение, то есть форма $\tilde{h}$, областью определения которой является множество всех $u\in\mathcal{H}$, для которых существует последовательность (1.1.1). На этом множестве

$$\tilde{h}[u,u]\overset{\text{def}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}h[u_n,u_n].$$

Определение 1.1.4. Замкнутый плотно определенный оператор H в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется *m-секториальным*, если

1. $\{(Hu,u)\mid u\in\operatorname{Dom} H, \|u\|=1\}\subset S(\gamma,\theta)$ для некоторых $0\leqslant\theta<\pi/2$, $\gamma\in\mathbb{R}$.
2. $\operatorname{Ran}(H+\lambda I)=\mathcal{H}$ для некоторого λ, такого что $\operatorname{Re}\lambda>-\gamma$.

Замечание 1.1.5. Из результатов [14, §V.3.2] следует, что в условиях определения пункт 2 выполнен для всех λ, таких что $\operatorname{Re}\lambda>-\gamma$. При этом $\|(H+\lambda I)^{-1}\|\leqslant(\operatorname{Re}\lambda+\gamma)^{-1}$.

Если форма h замкнута и секториальна, то ее вещественная часть $(\operatorname{Re} h)[u,u]=\operatorname{Re} h[u,u]$ замкнута и полуограничена снизу. На линейном множестве $\operatorname{Dom} h$ введем норму

$$\|u\|_h^2=\operatorname{Re} h[u,u]+\mu\|u\|^2,\quad \mu>-\gamma. \tag{1.1.2}$$

При любом μ пространство $\operatorname{Dom} h$ является гильбертовым по отношению к норме (1.1.2), и при различных μ эти нормы эквивалентны (см. [14, §VI.1.3]).

Если оператор H m-секториален, то полуторалинейная форма (Hu, v), заданная на $\operatorname{Dom} H$, секториальна и замыкаема. Верно и обратное. Мы приводим доказательство следующей теоремы из [14, Теорема VI.2.1].

Теорема 1.1.6. *Пусть h — замкнутая секториальная форма. Тогда существует единственный m-секториальный оператор H в $\mathcal{H}$, такой что* $\operatorname{Dom} H \subset \operatorname{Dom} h$*,*

$$h[u, v] = (Hu, v), \quad \forall u, v \in \operatorname{Dom} H,$$

и форма $h|_{\operatorname{Dom} H}$ допускает замыкание, совпадающее с h.

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что h секториальна с параметром $\gamma = 0$. Пусть $h_1 = h + 1$; в пространстве $\operatorname{Dom} h$ выберем эквивалентную норму $\|u\|_h^2 = \operatorname{Re} h_1[u, u]$. Форма h_1 является ограниченной полуторалинейной формой в гильбертовом пространстве $\operatorname{Dom} h$. Следовательно, она отвечает некоторому ограниченному оператору $B\colon \operatorname{Dom} h \to \operatorname{Dom} h$, и

$$h_1[u, v] = (Bu, v)_h, \quad u, v \in \operatorname{Dom} h.$$

Поскольку

$$\|u\|_h^2 = \operatorname{Re} h_1[u, u] = \operatorname{Re}(Bu, u)_h \leqslant \|Bu\|_h \|u\|_h,$$

имеем $\|Bu\|_h \geqslant \|u\|_h$. Далее, если $u \perp \operatorname{Ran} B$ в $\operatorname{Dom} h$, то

$$\|u\|_h^2 = \operatorname{Re}(Bu, u)_h = 0,$$

откуда $u = 0$. Следовательно, B является ограниченно обратимым оператором в $\operatorname{Dom} h$, и $\|B^{-1}\| \leqslant 1$.

Для $u \in \mathcal{H}$ рассмотрим функционал $v \mapsto (u, v)$, определенный на $v \in \operatorname{Dom} h$. Имеем

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \|v\| \leqslant \|u\| \|v\|_h.$$

Таким образом, этот функционал ограничен в $\operatorname{Dom} h$ с нормой $\|u\|$. По теореме Рисса существует единственный $u' \in \operatorname{Dom} h$, такой что $(u, v) = (u', v)_h$, $\|u'\|_h \leqslant \|u\|$. Теперь определим оператор G формулой $Gu = B^{-1}u'$. Это ограниченный оператор из $\mathcal{H}$ в $\operatorname{Dom} h$,

$$\|G\|_{\mathcal{H} \to \operatorname{Dom} h} \leqslant 1, \quad \|G\|_{\mathcal{H} \to \mathcal{H}} \leqslant 1.$$

Имеем

$$(u, v) = (u', v)_h = (BGu, v)_h = h_1[Gu, v] = (h + 1)[Gu, v]. \tag{1.1.3}$$

Таким образом,

$$h[Gu, v] = (u - Gu, v), \quad u \in \mathcal{H}, \ v \in \operatorname{Dom} h. \tag{1.1.4}$$

Из (1.1.3) следует, что если $Gu = 0$, то $u \perp \operatorname{Dom} h$. Из плотности $\operatorname{Dom} h$ в $\mathcal{H}$ получаем, что G обратим. Определим оператор $H = G^{-1} - I$ на области определения $\operatorname{Dom} H = \operatorname{Ran} G$. Тогда из (1.1.4) при $u = G^{-1}w$ вытекает

$$(Hw, v) = ((G^{-1} - I)w, v) = h[w, v] \quad \forall w \in \operatorname{Dom} H, v \in \operatorname{Dom} h.$$

Тем самым, построен оператор H. Он замкнут, поскольку G ограничен как оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, и m-секториален, так как на $\operatorname{Dom} H$ верно $(Hu, u) = h[u, u]$, и

$$\operatorname{Ran}(H + I) = \operatorname{Ran} G^{-1} = \operatorname{Dom} G = \mathcal{H}.$$

Форма $h|_{\operatorname{Dom} H}$ допускает замыкание, поскольку h является ее замкнутым расширением. Чтобы показать, что замыкание совпадает с h, достаточно проверить, что $\operatorname{Dom} H = \operatorname{Ran} G$ плотно в $\operatorname{Dom} h$. Поскольку B является изоморфизмом $\operatorname{Dom} h$ на себя, достаточно показать, что $\operatorname{Ran}(BG)$ плотен в $\operatorname{Dom} h$. Пусть $v \in \operatorname{Dom} h$ ортогонален к $\operatorname{Ran}(BG)$ в $\operatorname{Dom} h$. Тогда из (1.1.3) следует, что $(u, v) = 0$ при всех $u \in \mathcal{H}$. Таким образом, $v = 0$ и, следовательно, $\operatorname{Dom} H$ плотно в $\operatorname{Dom} h$. ∎

При $\theta = 0$ секториальная форма является полуограниченной снизу формой. Если она замкнута, то соответствующий оператор H будет самосопряженным и полуограниченным снизу. Если форма h замкнута и секториальна, то ее вещественная часть $\operatorname{Re} h$ отвечает самосопряженному полуограниченному снизу оператору $\operatorname{Re} H$. Через $\rho(H)$ мы обозначаем резольвентное множество оператора H.

Теорема 1.1.7. *Пусть H — замкнутый оператор. Тогда условия*

1. *Спектр оператора H дискретен, то есть состоит из собственных значений конечной кратности и не имеет конечных точек накопления.*

2. *Оператор $(H - \lambda I)^{-1}$ компактен при некотором $\lambda \in \rho(H)$.*

3. *Оператор $(H - \lambda I)^{-1}$ компактен при всех $\lambda \in \rho(H)$*

равносильны. Если оператор H m-секториален и отвечает секториальной форме h, то условия 1–3 также равносильны компактности оператора вложения $I_h\colon \operatorname{Dom} h \to \mathcal{H}$.

Доказательство. Эквивалентность пунктов 1–3 следует из [14, Теорема III.6.29]. Из [14, Теорема VI.3.3] следует, что в случае m-секториального H условия 1–3 для H и $\operatorname{Re} H$ равносильны. Наконец, для самосопряженного оператора $\operatorname{Re} H$ эквивалентность условий 1–3 и компактности оператора I_h доказана в [29, Теорема XIII.64]. ∎

Определение 1.1.8. Пусть h — замкнутая секториальная форма. Полуторалинейная (не обязательно замкнутая) форма h' в $\mathcal{H}$ называется *h-ограниченной*, если $\operatorname{Dom} h' \supset \operatorname{Dom} h$, и

$$|h'[u,u]| \leqslant a\|u\|^2 + b|h[u,u]|, \quad \forall u \in \operatorname{Dom} h \tag{1.1.5}$$

для некоторых $a, b \geqslant 0$.

В силу секториальности h неравенство (1.1.5) равносильно (возможно, с другими параметрами a и b) неравенству

$$|h'[u,u]| \leqslant a\|u\|^2 + b \operatorname{Re} h[u,u], \quad \forall u \in \operatorname{Dom} h. \tag{1.1.6}$$

Теорема 1.1.9. *Пусть h — замкнутая секториальная форма с параметрами γ, θ, и пусть форма h' является h-ограниченной, причем в неравенстве* (1.1.6) $0 \leqslant b < 1$. *Тогда форма $h + h'$, заданная на $\operatorname{Dom} h$, является замкнутой и секториальной с параметрами*

$$\gamma' \operatorname{tg} \theta' = \gamma \operatorname{tg} \theta - \frac{a(\operatorname{tg}\theta + 1)}{1-b}, \quad \operatorname{tg}\theta' = \frac{\operatorname{tg}\theta + b}{1-b}.$$

Доказательство. Мы приводим рассуждение из [14, §VI.1.6]. В силу секториальности h

$$|\operatorname{Im} h[u,u]| \leqslant (\operatorname{Re} h[u,u] - \gamma\|u\|^2) \operatorname{tg}\theta, \quad \forall u \in \operatorname{Dom} h.$$

Следовательно, на области определения h имеем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im}(h+h')[u,u]| &\leqslant |\operatorname{Im} h[u,u]| + |\operatorname{Im} h'[u,u]| \leqslant |\operatorname{Im} h[u,u]| + |h'[u,u]| \\ &\leqslant (\operatorname{tg}\theta + b) \operatorname{Re} h[u,u] + (a - \gamma \operatorname{tg}\theta)\|u\|^2. \end{aligned}$$

Далее,

$$\operatorname{Re}(h+h')[u,u] \geqslant \operatorname{Re} h[u,u] - |h'[u,u]| \geqslant (1-b) \operatorname{Re} h[u,u] - a\|u\|^2.$$

Следовательно,

$$|\operatorname{Im}(h+h')[u,u]| \leqslant (1-b)^{-1}(\operatorname{tg}\theta+b)(\operatorname{Re}(h+h')[u,u]+a\|u\|^2)+(a-\gamma\operatorname{tg}\theta)\|u\|^2$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\theta+b}{1-b}\operatorname{Re}(h+h')[u,u] + \left(\frac{a(\operatorname{tg}\theta+1)}{1-b} - \gamma\operatorname{tg}\theta\right)\|u\|^2.$$

Отсюда следует секториальность $h+h'$ с соответствующими параметрами.

В силу (1.1.6) с $b<1$, сходимости (1.1.1) для h и $h+h'$ равносильны. Следовательно, форма $h+h'$ замкнута. ∎

1.1.2 Голоморфные семейства операторов и форм

Определение 1.1.10. Пусть задано семейство замкнутых секториальных форм $h(z)$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где z принадлежит области $D_0 \subset \mathbb{C}$. Это семейство называется *голоморфным семейством типа* (a), если

1. $\operatorname{Dom} h(z) = \mathcal{D}$ для некоторого плотного линейного подмножества $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$, не зависящего от z.

2. При любых $u, v \in \mathcal{D}$ функция $h(z)[u,v]$ является голоморфной в D_0 по переменной z.

Определение 1.1.11. Семейство ограниченных операторов $\{B(z), z \in D_0\}$ называется *ограниченно-голоморфным*, если оно допускает разложение в сходящийся по операторной норме ряд Тейлора в окрестности любой точки D_0.

Определение 1.1.12. Семейство замкнутых плотно определенных операторов $\{H(z), z \in D_0\}$ называется *голоморфным*, если в окрестности любой точки $z_0 \in D_0$ существуют ограниченно-голоморфные семейства $\{U(z)\}$, $\{V(z)\}$, такие что $U(z)$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{H}$ на $\operatorname{Dom} H(z)$ и

$$H(z)U(z) = V(z) \text{ в некоторой окрестности } z_0.$$

Следующие две теоремы доказаны в [14, §VII.4.2].

Теорема 1.1.13. *Пусть $\{h(z), z \in D_0\}$ — голоморфное семейство секториальных форм типа (a). Тогда соответствующее семейство m-секториальных операторов образует голоморфное семейство в D_0.*

Теорема 1.1.14. *Пусть* $\{h(z), z \in D_0\}$ *— голоморфное семейство секториальных форм типа (a). Если в какой-то точке спектр соответствующего оператора дискретен, то он дискретен при всех* $z \in D_0$.

Определение 1.1.15. Семейство (m-секториальных) операторов, отвечающих голоморфному семейству секториальных форм типа (a), называется *голоморфным семейством типа* (B).

Лемма 1.1.16. *Пусть* $\{H(z), z \in D\}$ *— ограниченно-голоморфное семейство компактных операторов в области* $D \subset \mathbb{C}$. *Тогда множество*

$$\{z \in D \mid \textit{оператор } I - H(z) \textit{ не является ограниченно обратимым}\}$$

либо дискретно в D, *либо совпадает со всем* D.

Доказательство. Мы приводим доказательство из [29, Теорема VI.14]. Пусть $z_0 \in D$. Выберем такое r, что $\|H(z) - H(z_0)\| < \frac{1}{2}$ при $|z - z_0| < r$ и $D_r \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < r\} \subset D$. Пусть F — оператор конечного ранга, такой что $\|H(z_0) - F\| < \frac{1}{2}$. Тогда при $z \in D_r$ функция $(I - H(z) + F)^{-1}$ существует и является ограниченно-голоморфной. Пусть

$$G(z) = F(I - H(z) + F)^{-1}.$$

Тогда

$$I - H(z) = (I - G(z))(I - H(z) + F),$$

так что оператор $I - H(z)$ при $z \in D_r$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $I - G(z)$.

В силу конечности ранга, оператор F можно записать в виде $Fu = \sum_{i=1}^{N} (u, v_i) w_i$ для некоторых $v_i, w_i \in \mathcal{H}$, где w_i линейно независимы. Тогда условие $(I - G(z))u = 0$ равносильно

$$u = \sum_{i=1}^{N} ((I - H(z) + F)^{-1} u, v_i) w_i. \tag{1.1.7}$$

Пусть

$$\tilde{v}_i(z) = ((I - H(z) + F)^{-1})^* v_i.$$

Поскольку из условия (1.1.7) следует $u \in \operatorname{Ran} F$, можно переписать его в виде

$$u = \sum_{i=1}^{N} \beta_i w_i, \quad \beta_n = \sum_{m=1}^{N} (w_m, \tilde{v}_n(z)) \beta_m, \quad n = 1, \dots N.$$

Последняя система уравнений имеет нетривиальное решение в том и только том случае, когда

$$d(z) = \det\{\delta_{mn} - (w_m, \tilde{v}_n(z))\}_{m,n=1}^{N} \neq 0.$$

Но $d(z)$ голоморфна в D_r (поскольку $\tilde{v}_i(z)$ антиголоморфны). Следовательно, множество ее нулей либо дискретно в D_r, либо совпадает со всем D_r. Это доказывает утверждение леммы для области D_r. Для всей области D она следует из стандартных соображений связности. ∎

Теорема 1.1.17. *Пусть $\{H(z), z \in D_0\}$ — голоморфное семейство операторов с дискретным спектром. Тогда для любой точки $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется одно из двух условий:*

1. *$\lambda \in \sigma(H(z))\ \forall z \in D_0$.*

2. *Множество $\{z \in D_0 \colon \lambda \in \sigma(H(z))\}$ дискретно в D_0.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in D_0$, $\lambda_0 \notin \sigma(H(z_0))$. По определению

$$(H(z_0) - \lambda_0)U(z_0) = V(z_0) - \lambda_0 U(z_0).$$

Левая часть является взаимно однозначным отображением из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$. Значит, и правая часть им является. Следовательно, правая часть обратима при $|z - z_0| < \varepsilon$, функция

$$(H(z) - \lambda_0 I)^{-1} = U(z)(V(z) - \lambda_0 U(z))^{-1}$$

является ограниченно-голоморфной при $|z - z_0| < \varepsilon$, и ее значения являются компактными операторами (см. теорему 1.1.7). Заметим, что λ является собственным значением $H(z)$ тогда и только тогда, когда оператор $(I-(\lambda-\lambda_0)(H(z)-\lambda_0 I)^{-1})$ не является обратимым. Таким образом, утверждение следует из леммы 1.1.16. ∎

Определение 1.1.18. Голоморфное семейство $\{H(z), z \in D_0\}$ типа (B) называется *самосопряженным голоморфным семейством типа* (B), если область D_0 симметрична относительно вещественной оси, и $H(\bar{z}) = H(z)^*$.

Теорема 1.1.19. *Пусть $\{H(z), z \in D_0\}$ — самосопряженное голоморфное семейство типа (B) с компактной резольвентой. Тогда для любого конечного интервала $I_0 \subset D_0 \cap \mathbb{R}$ существует последовательность скалярных функций $\mu_n(x)$ и последовательность вектор-функций $\varphi_n(x)$, вещественно-аналитичных на I_0 и таких, что при любом $x \in I_0$ семейство $\{\varphi_n(x)\}$ является полной ортонормированной системой собственных векторов оператора $H(x)$ с собственными значениями $\mu_n(x)$.*

Доказательство. См. [14, Теорема VII.3.9 и Замечание VII.4.22]. ∎

1.1.3 Прямой интеграл гильбертовых пространств

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{M}$ — измеримое пространство с конечной мерой $d\nu$, такое что пространство $L_2(\mathfrak{M})$ сепарабельно.

Определение 1.1.20. Вектор-функция $u\colon \mathfrak{M} \to \mathcal{H}$ называется (*слабо*) *измеримой*, если функция $x \mapsto (u(x), v)$ измерима при любом $v \in \mathcal{H}$. Семейство ограниченных операторов $\{A(x), x \in \mathfrak{M}\}$ в $\mathcal{H}$ называется (*слабо*) *измеримым*, если функция $x \mapsto (A(x)u, v)$ измерима при любых $u, v \in \mathcal{H}$. Семейство самосопряженных операторов $\{A(x), x \in \mathfrak{M}\}$, действующих в пространстве $\mathcal{H}$, называется *измеримым*, если функция $x \mapsto (A(x) - \lambda I)^{-1}$ измерима при любом $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$.

Стандартным образом мы отождествляем функции на $\mathfrak{M}$, совпадающие ν-п. в.

Определение 1.1.21. *Прямым интегралом с постоянными слоями* называется пространство

$$\mathcal{I} = \int\limits_{\mathfrak{M}} \oplus \mathcal{H}\, d\nu$$

ν-измеримых вектор-функций $\varphi\colon \mathfrak{M} \to \mathcal{H}$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{I}} = \int\limits_{\mathfrak{M}} \|\varphi(x)\|^2_{\mathcal{H}}\, d\nu(x).$$

Пространство $\mathcal{I}$ является сепарабельным гильбертовым пространством, базисом в нем будет $\{f_m \psi_n(x)\}$, где $\{f_m\}$ — базис в $\mathcal{H}$, а $\{\psi_n(x)\}$ — базис в $L_2(\mathfrak{M})$.

Определение 1.1.22. Пусть $\{A(x), x \in \mathfrak{M}\}$ — равномерно ограниченное по x измеримое семейство операторов в $\mathcal{H}$. Тогда *прямым интегралом* семейства $\{A(x)\}$ называется ограниченный оператор в $\mathcal{I}$, заданный полуторалинейной формой

$$\left(\int\limits_{\mathfrak{M}} \oplus A(x)\, d\nu(x)\right)(u, v) = \int\limits_{\mathfrak{M}} (A(x)u(x), v(x))\, d\nu(x).$$

Ясно, что

$$\left(\left(\int_{\mathfrak{M}} \oplus A d\nu\right) u\right)(x) = A(x)u(x)$$

при почти всех $x \in \mathfrak{M}$.

Теорема 1.1.23. *Пусть* $\{A(x), x \in \mathfrak{M}\}$ *— измеримое семейство самосопряженных операторов. Тогда*

1. *Оператор* A*, действующий в* $\mathcal{I}$*, заданный на области определения*

$$\operatorname{Dom} A =$$

$$\Big\{u = \{u(x)\} \in \mathcal{I} \colon u(x) \in \operatorname{Dom} A(x) \text{ для п. в. } x \in \mathfrak{M}, \int\limits_{\mathfrak{M}} \|A(x)u(x)\|^2_{\mathcal{H}}\, d\nu(x) < +\infty\Big\}$$

   формулой $(Au)(x) = A(x)u(x)$*, является самосопряженным в* $\mathcal{I}$*.*

2. *Если спектры операторов* $A(x)$ *являются чисто абсолютно непрерывными при всех* $x \in \mathfrak{M}$*, то то же верно и для* A*.*

3. *Пусть* $\mathfrak{M} = I_0$ *— отрезок вещественной оси с мерой Лебега. Предположим, что семейство операторов* $A(x)$ *продолжается до самосопряженного голоморфного семейства типа (B) с компактной резольвентой в области* $D_0 \supset I_0$*, причем среди функций* $\mu_n(x)$*, полученных из теоремы* 1.1.19*, нет постоянных. Тогда спектр оператора* A *является чисто абсолютно непрерывным.*

Доказательство. (см. [29, Теоремы XIII.85, XIII.86]). Очевидно, что оператор A симметричен. Покажем, что $\operatorname{Ran}(A - \lambda I) = \mathcal{I}$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Пусть $C_\lambda(x) = (A(x) - \lambda I)^{-1}$. Функция $C_\lambda(x)$ измерима, и $\|C_\lambda(x)\| \leqslant |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$ при всех $x \in \mathfrak{M}$. Положим

$$C_\lambda = \int\limits_{\mathfrak{M}} \oplus C_\lambda(x)\, d\nu(x).$$

Пусть $u \in \mathcal{I}$, $v = C_\lambda u$. Легко проверяется, что $v \in \operatorname{Dom} A$, $(A - \lambda I)v = u$. Отсюда следует утверждение пункта 1.

Из рассуждений предыдущего абзаца следует, что

$$(A - \lambda I)^{-1} = \int\limits_{\mathfrak{M}} \oplus (A(x) - \lambda I)^{-1}\, d\nu(x), \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0.$$

Стандартным образом отсюда получается равенство для спектральных проекторов на интервалы

$$E_A(\Delta) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \oplus E_{A(x)}(\Delta)\, d\nu(x), \quad \Delta = (a; b) \subset \mathbb{R}.$$

То же верно, если $\Delta \subset \mathbb{R}$ — борелевское множество. Отсюда следует пункт 2: если мера Лебега множества Δ равна нулю, то $E_{A(x)}(\Delta) = 0$ при всех $x \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $E_A(\Delta) = 0$.

Докажем утверждение пункта 3. Пусть Δ — борелевское множество, мера Лебега которого равна 0. Заметим, что $E_{A(x)}(\Delta) \neq 0$ тогда и только тогда, когда для некоторого n $\mu_n(x) \in \Delta$. Пусть

$$I_n = \{x \in I_0 \mid \mu_n(x) \in \Delta\}.$$

Покажем, что это множество имеет меру нуль при любом n. Действительно, непостоянная вещественно-аналитическая функция $\mu_n(x)$ имеет не более чем счетное количество промежутков монотонности на I_0, так как множество нулей ее производной должно быть дискретно в I_0. Обозначим эти промежутки монотонности через $[a_k; b_k]$. Мы имеем

$$I_n \subset \bigcup_{m,k} \left((\mu_n|_{[a_k;b_k]})^{-1} \left(\left(\left[\mu_n(a_k) + \frac{1}{m}; \mu_n(b_k) - \frac{1}{m} \right] \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \cup \left[\mu_n(b_k) + \frac{1}{m}; \mu_n(a_k) - \frac{1}{m} \right] \right) \cap \Delta \right) \cup \{a_k, b_k\} \right),$$

где можно дополнительно предполагать, что $|\mu_n(b_k) - \mu_n(a_k)| > 1/m$. Каждое из объединяемых множеств имеет меру нуль. Действительно, пусть для определенности $\mu_n(a_k) < \mu_n(b_k)$. Тогде функция, обратная к $\mu_n|_{[a_k;b_k]}$, на интервале $\left[\mu_n(a_k) + \frac{1}{m}; \mu_n(b_k) - \frac{1}{m}\right]$ является абсолютно непрерывной (поскольку ее производная ограничена) и, следовательно, прообраз пересечения соответствующего интервала с Δ будет иметь меру нуль. Следовательно, мера I_n равна нулю. Объединяя по n, получаем, что мера множества $\{x \in I_0 : E_{A(x)}(\Delta) \neq 0\}$ равна нулю, и следовательно, $E_A(\Delta) = 0$. ∎

Сформулируем (более слабый) аналог этой теоремы для семейств m-секториальных операторов.

Определение 1.1.24. Семейство $\{H(x), x \in \mathfrak{M}\}$, будем называть *измеримым семейством m-секториальных операторов*, если операторы $H(x)$ являются m-секториальными с параметрами γ, θ, не зависящими от x, и функция $(H(x) + \lambda I)^{-1}$ измерима при $\operatorname{Re}\lambda > -\gamma$.

Теорема 1.1.25. *Пусть $\{H(x), x \in \mathfrak{M}\}$ — измеримое семейство m-секториальных операторов с параметрами γ, θ. Тогда*

1. *Оператор H, действующий в $\mathcal{I}$, заданный на области определения*

$$\operatorname{Dom} H =$$

$$\Big\{ u = \{u(x)\} \in \mathcal{I} \colon u(x) \in \operatorname{Dom} H(x) \quad \text{для п. в. } x \in \mathfrak{M}, \int\limits_{\mathfrak{M}} \|H(x)u(x)\|^2_{\mathcal{H}} \, d\nu(x) < +\infty \Big\}$$

формулой $(Hu)(x) = H(x)u(x)$, является m-секториальным в $\mathcal{I}$ с теми же параметрами γ, θ.

2. *Предположим, что $\lambda \in \sigma_p(H)$. Тогда*

$$\nu\left(\{x \in \mathfrak{M} \colon \lambda \in \sigma_p(H(x))\}\right) > 0.$$

Доказательство. Множество $S(\gamma, \theta)$ выпукло. Поэтому условие $(Hu, u) \in S(\gamma, \theta)$ следует из аналогичного условия на $H(x)$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda > -\gamma$. Рассмотрим семейство операторов $C_\lambda(x) = (H(x) + \lambda I)^{-1}$. Функция $C_\lambda(x)$ измерима, и $\|C_\lambda(x)\| \leqslant (\operatorname{Re} \lambda + \gamma)^{-1}$ при всех $x \in \mathfrak{M}$ (см. замечание 1.1.5). Положим

$$C_\lambda = \int\limits_{\mathfrak{M}} \oplus C_\lambda(x) \, d\nu(x).$$

Пусть $u \in \mathcal{I}$, $v = C_\lambda u$. Легко проверяется, что $v \in \operatorname{Dom} H$, $(H + \lambda I)v = u$. Следовательно, $\lambda \in \rho(H)$, $\|(H + \lambda I)^{-1}\| \leqslant (\operatorname{Re} \lambda + \gamma)^{-1}$. Таким образом, H является m-секториальным.

Если $u = \{u(x)\}$ — ненулевой собственный вектор H, отвечающий собственному числу λ, то множество $\{x \in \mathfrak{M} \colon u(x) \neq 0\}$ имеет положительную меру. На этом множестве $\lambda \in \sigma_p(H(x))$. ∎

1.2 Схема Томаса для оператора Шрёдингера

В данном разделе мы дадим определение оператора Шрёдингера с периодическим потенциалом и сформулируем достаточные условия абсолютной непрерывности его спектра (в несамосопряженном случае — отсутствия собственных значений). Впервые они сформулированы в работе [47], см. также [29]. По поводу изложения на языке квадратичных форм см. обзор [6]. Несамосопряженный вариант схемы рассматривается в работах [20, 22, 39]. Основным результатом раздела является теорема 1.2.4.

1.2.1 Определение оператора Шрёдингера

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ — решетка,

$$\Gamma = \{l_1 b_1 + \ldots + l_m b_m, \quad l_j \in \mathbb{Z}\}, \tag{1.2.1}$$

где $b_1, \ldots, b_m$ — фиксированный (не обязательно ортонормированный) базис в $\mathbb{R}^m$. Пусть

$$\Omega = \{y_1 b_1 + \ldots + y_m b_m, \quad 0 \leqslant y_i < 1\} \tag{1.2.2}$$

— элементарная ячейка решетки Γ. Ячейка Ω естественно отождествляется с множеством точек m-мерного тора $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/\Gamma$. Пусть U — гладкое компактное k-мерное риманово многообразие с краем или без края, либо замыкание ограниченной области в $\mathbb{R}^k$ с липшицевой границей. Оператор Шрёдингера будет задан в многомерном цилиндре $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$, и мы будем считать $d = k + m \geqslant 3$. Мы не исключаем случаи $k = 0$ (тогда область Ξ — это все пространство $\mathbb{R}^d$) и $k = 1$ (при этом U — отрезок, Ξ — плоско-параллельный слой, или U — окружность).

Пусть U — замыкание области в $\mathbb{R}^k$ с липшицевой границей. Будем называть C^l-*гиперповерхностью* $(d-1)$-мерное липшицево подмногообразие $\Sigma_0 \subset U \times \mathbb{T}^m$, такое что существует C^l-гладкое компактное подмногообразие

$$\widetilde{\Sigma}_0 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^m$$

без края или с C^l-гладким краем, такое что $\Sigma_0 = \widetilde{\Sigma}_0 \cap (U \times \mathbb{T}^m)$ и $\mathrm{mes}_{d-1}(\Sigma_0) > 0$. Здесь mes_{d-1} — $(d-1)$-мерная мера Лебега. В случае, если U — произвольное многообразие с C^l-гладким или липшицевым краем, будем определять гиперповерхность как подмногообразие в $U \times \mathbb{T}^m$ соответствующего класса.

Определение 1.2.1. Γ-*периодической системой* C^l-(*соответственно липшицевых*) *гиперповерхностей* в цилиндре $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$ будем называть подмножество вида

$$\Sigma = \bigcup_{j=1}^{j_0} \bigcup_{n \in \Gamma} (\Sigma_j + n) \subset \Xi,$$

где вектор $n \in \Gamma \subset \mathbb{R}^m$ отождествляется с вектором $(0, n) \in \mathbb{R}^d$, а $\Sigma_j \subset U \times \Omega$, рассматриваемые как подмногообразия $U \times \mathbb{T}^m$, являются C^l-гладкими (соответственно липшицевыми) гиперповерхностями.

Пусть $N \in \mathbb{N}$,

$$V \in L_{d/2,\mathrm{loc}}(\Xi; M_N(\mathbb{C})), \quad \sigma \in L_{d-1,\mathrm{loc}}(\Sigma; M_N(\mathbb{C})) \tag{1.2.3}$$

— Γ-периодические матричнозначные функции (соответственно электрический и сингулярный электрический потенциалы),

$$V(x, y + l) = V(x, y), \quad (x, y) \in \Xi,\ l \in \Gamma;$$

$$\sigma(x, y + l) = \sigma(x, y), \quad (x, y) \in \Sigma,\ l \in \Gamma.$$

Пусть $a[\cdot,\cdot]$ — квадратичная форма в $L_2(U; \mathbb{C}^N)$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. a замкнута и неотрицательна.

2. $\operatorname{Dom} a \subset H^1(U; \mathbb{C}^N)$ — замкнутое подпространство, плотное в $L_2(U; \mathbb{C}^N)$ и такое, что $C^\infty(U; \mathbb{C}^N) \cap \operatorname{Dom} a$ плотно в $\operatorname{Dom} a$.

3. $C_1 \|u\|^2_{H^1(U;\mathbb{C}^N)} \leqslant a[u, u] + \|u\|^2_{L_2(U;\mathbb{C}^N)} \leqslant C_2 \|u\|^2_{H^1(U;\mathbb{C}^N)}$ для некоторых $C_1, C_2 > 0$ и любого $u \in \operatorname{Dom} a$.

В пространстве $L_2(\Xi; \mathbb{C}^N)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$h[u, v] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a[u(\cdot, y), v(\cdot, y)]\, dy +$$
$$+ \int\limits_{\Xi} \langle \nabla_y u(x, y), \nabla_y v(x, y)\rangle\, dx\, dy + \int\limits_{\Xi} \langle V(x, y) u(x, y), v(x, y)\rangle\, dx\, dy$$
$$+ \int\limits_{\Sigma} \langle \sigma(x, y) u(x, y), v(x, y)\rangle\, dS(x, y), \quad (1.2.4)$$

где dS — поверхностная мера на Σ. Форма h задана на области определения

$$\operatorname{Dom} h = L_2(U; H^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}^N)) \cap L_2(\mathbb{R}^m; \operatorname{Dom} a) \subset H^1(\Xi; \mathbb{C}^N), \qquad (1.2.5)$$

где $L_2(U; H^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}^N))$, $L_2(\mathbb{R}^m; \operatorname{Dom} a)$ — пространства вектор-функций с нормами

$$\|u\|^2_{L_2(U;H^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}^N))} = \int\limits_U \|u(x, \cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}^N)}\, dx,$$

$$\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^m;\operatorname{Dom} a)} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a[u(\cdot, y), u(\cdot, y)]\, dy + \|u\|^2_{L_2(\Xi;\mathbb{C}^N)};$$

в последнем случае дополнительно предполагается, что $u(\cdot, y) \in \operatorname{Dom} a$ при п. в. $y \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 1.2.2. *Полуторалинейная форма* (1.2.4) *с потенциалами* (1.2.3) *на области определения* (1.2.5) *является замкнутой и секториальной в* $L_2(\Xi;\mathbb{C}^N)$. *При самосопряженных* V,σ *она симметрична и полуограничена снизу.*

Доказательство. Пусть

$$h_0[u,v] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a[u(\cdot,y),v(\cdot,y)]\,dy + \int\limits_{\Xi} \langle \nabla_y u(x,y), \nabla_y v(x,y)\rangle\,dx\,dy$$

на той же области определения (1.2.5). Заметим, что форма h_0 замкнута и неотрицательна, и

$$\|u\|^2_{H^1(\Xi;\mathbb{C}^N)} \leqslant C\left(h_0[u,u] + \|u\|^2_{L_2(\Xi;\mathbb{C}^N)}\right). \tag{1.2.6}$$

Имеет место вложение Соболева

$$\|u\|_{L_{\frac{2d}{d-2}}(U\times(\Omega+n);\mathbb{C}^N)} \leqslant C_0\|u\|_{H^1(U\times(\Omega+n);\mathbb{C}^N)}, \tag{1.2.7}$$

где C_0 не зависит от $n\in\Gamma$. Пусть

$$V = V_\varepsilon + V_\infty, \quad \|V_\varepsilon\|_{L_{d/2}(U\times\Omega;M_N(\mathbb{C}))} \leqslant \varepsilon, \quad \|V_\infty\|_{L_\infty(U\times\Omega;M_N(\mathbb{C}))} \leqslant C(\varepsilon). \tag{1.2.8}$$

В силу неравенства Гёльдера и неравенств (1.2.6), (1.2.7), (1.2.8), имеем

$$\begin{aligned}\Bigg|\int\limits_{U\times(\Omega+n)} \langle (V_\varepsilon(x,y)+V_\infty(x,y))u(x,y),u(x,y)\rangle\,dx\,dy\Bigg| &\leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|u\|^2_{L_{\frac{2d}{d-2}}(U\times(\Omega+n);\mathbb{C}^N)} &+ C(\varepsilon)\|u\|^2_{L_2(U\times(\Omega+n);\mathbb{C}^N)} \\ \leqslant \varepsilon C_0^2\|u\|^2_{H^1(U\times(\Omega+n);\mathbb{C}^N)} &+ C(\varepsilon)\|u\|^2_{L_2(U\times(\Omega+n);\mathbb{C}^N)}.\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Используя Γ-периодичность V и суммируя по n, получаем

$$\begin{aligned}\Bigg|\int\limits_{\Xi}\langle V(x,y)u(x,y),u(x,y)\rangle\,dx\,dy\Bigg| &\leqslant \varepsilon C_0^2\|u\|^2_{H^1(\Xi;\mathbb{C}^N)} + C(\varepsilon)\|u\|^2_{L_2(\Xi;\mathbb{C}^N)} \\ &\leqslant (C(\varepsilon)+\varepsilon\widetilde{C})\|u\|^2_{L_2(\Xi;\mathbb{C}^N)} + \varepsilon\widetilde{C}h_0[u,u].\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Следовательно, форма

$$\int\limits_{\Xi}\langle V(x,y)u(x,y),v(x,y)\rangle\,dx\,dy$$

является h_0-ограниченной (с любой константой $b > 0$ в неравенстве (1.1.6)), см. определение 1.1.8.

Оператор следа, действующий из $H^1(U \times (\Omega + n))$ в $L_{\frac{2(d-1)}{d-2}}(\Sigma \cap (U \times (\Omega + n)))$, ограничен, а из $H^1(U \times (\Omega + n))$ в $L_2(\Sigma \cap (U \times (\Omega + n)))$ — компактен. Отсюда

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2(d-1)}{d-2}}(\Sigma \cap (U \times (\Omega+n)); \mathbb{C}^N)} \leqslant C_1 \|u\|^2_{H^1(U \times (\Omega+n); \mathbb{C}^N)},$$

$$\|u\|^2_{L_2(\Sigma \cap (U \times (\Omega+n)); \mathbb{C}^N)} \leqslant \varepsilon' \|u\|^2_{H^1(U \times (\Omega+n); \mathbb{C}^N)} + C'(\varepsilon') \|u\|^2_{L_2(U \times (\Omega+n); \mathbb{C}^N)},$$

где $C'(\varepsilon')$ не зависит от n. Таким образом, рассматривая аналогичное разложение

$$\sigma = \sigma_\varepsilon + \sigma_\infty, \quad \|\sigma_\varepsilon\|_{L_{d-1}(\Sigma \cap (U \times \Omega); M_N(\mathbb{C}))} \leqslant \varepsilon, \quad \|\sigma_\infty\|_{L_\infty(\Sigma \cap (U \times \Omega); M_N(\mathbb{C}))} \leqslant C(\varepsilon),$$

можно получить при любом $\varepsilon' > 0$

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_{\Sigma \cap (U \times (\Omega+n))} \langle (\sigma_\varepsilon(x,y) + \sigma_\infty(x,y)) u(x,y), u(x,y) \rangle \, dS(x,y) \right| \\
&\qquad \leqslant \varepsilon \|u\|^2_{L_{\frac{2(d-1)}{d-2}}(\Sigma \cap (U \times (\Omega+n)); \mathbb{C}^N)} + C(\varepsilon) \|u\|^2_{L_2(\Sigma \cap (U \times (\Omega+n)); \mathbb{C}^N)} \\
&\qquad\quad \leqslant \varepsilon C_1 \|u\|^2_{H^1(U \times (\Omega+n); \mathbb{C}^N)} + C(\varepsilon) \varepsilon' \|u\|^2_{H^1(U \times (\Omega+n); \mathbb{C}^N)} \\
&\qquad\qquad + C(\varepsilon) C'(\varepsilon') \|u\|^2_{L_2(U \times (\Omega+n); \mathbb{C}^N)}. \qquad (1.2.11)
\end{aligned}$$

При этом $C(\varepsilon)$, $C'(\varepsilon')$ не зависят от n. Суммируя по n, получаем h_0-ограниченность

$$\left| \int\limits_{\Sigma} \langle \sigma(x,y) u(x,y), u(x,y) \rangle \, dS(x,y) \right| \leqslant \varepsilon h_0[u,u] + C(\varepsilon) \|u\|^2_{L_2(\Xi; \mathbb{C}^N)}. \qquad (1.2.12)$$

Следовательно, по теореме 1.1.9, форма h является замкнутой и секториальной. ∎

Квадратичной форме h отвечает m-секториальный оператор H (самосопряженный и полуограниченный снизу при самосопряженных V, σ). Его мы будем называть периодическим оператором Шрёдингера в многомерном цилиндре Ξ с периодическим электрическим потенциалом V и периодическим сингулярным потенциалом $\sigma\delta_\Sigma$. Это определение охватывает, в частности, операторы с различными краевыми условиями: если

$$a[u,u] = \int\limits_U |\nabla_x u(x)|^2 \, dx$$

и $\operatorname{Dom} a = H_0^1(U;\mathbb{C}^N)$ (пространство функций из $H^1(U;\mathbb{C}^N)$, обращающихся в нуль на ∂U), то

$$H = -\Delta + V(x,y) + \sigma(x,y)\delta_\Sigma(x,y)$$

— оператор Шрёдингера с краевым условием Дирихле. Если $\operatorname{Dom} a = H^1(U;\mathbb{C}^N)$, $\Sigma = \partial\Xi$, то это оператор с краевым условием третьего типа

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \sigma(x,y)u(x,y), \quad (x,y) \in \partial U \times \mathbb{R}^m.$$

При $\sigma = 0$ это оператор с краевым условием Неймана. Можно рассматривать более сложные ситуации, в которых на разные компоненты $u(x,y) \in \mathbb{C}^N$ накладываются различные условия, зависящие от точки границы. Подобные примеры будут рассмотрены в следующих главах.

1.2.2 Разложение в прямой интеграл

Пусть $\widetilde{\Gamma}$ — решетка, двойственная к Γ,

$$\widetilde{\Gamma} = \{n = \sum_{j=1}^m n_j\tilde{b}_j,\ n_j \in \mathbb{Z}\}, \quad \langle b_k, \tilde{b}_j\rangle = 2\pi\delta_{kj}.$$

Пусть $\widetilde{\Omega}$ — элементарная ячейка решетки $\widetilde{\Gamma}$. Введем преобразование Флоке-Блоха-Гельфанда по переменным y:

$$(Fu)(\xi,x,y) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2}\sum_{l\in\Gamma} e^{-i\langle\xi,y+l\rangle}u(x,y+l), \quad (x,y)\in\Xi, \quad \xi\in\widetilde{\Omega}. \tag{1.2.13}$$

задав его вначале на классе непрерывных функций на Ξ, достаточно быстро убывающих по переменным y. Имеем

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \|(Fu)(\xi,\cdot)\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}\,d\xi = \int\limits_{\Omega} \|(Fu)(\cdot,y)\|^2_{L_2(U\times\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^N)}\,dy$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left\| \left(\sum_{l\in\Gamma} |u(\cdot,y+l)|^2\right)^{1/2} \right\|^2_{L_2(U;\mathbb{C}^N)} dy = \|u\|^2_{L_2(\Xi;\mathbb{C}^N)},$$

так что F продолжается до изометрического оператора

$$F\colon L_2(\Xi) \to \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)\,d\xi.$$

Отождествляя функции на Ω с Γ-периодическими функциями на $\mathbb{R}^m$, введем сопряженный оператор

$$(F^*u)(x,y) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle \xi, y\rangle} u(\xi, x, y)\, d\xi, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Он является левым обратным к F, так как

$$|\widetilde{\Omega}|^{-1} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \sum_{l\in\Gamma} e^{-i\langle \xi, l\rangle} u(x, y+l)\, d\xi = u(x,y).$$

В силу Γ-периодичности $u(\xi, x, y)$ по y, аналогично

$$\begin{aligned} &|\widetilde{\Omega}|^{-1} \sum_{l\in\Gamma} e^{-i\langle \xi, y+l\rangle} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle \eta, y+l\rangle} u(\eta, x, y+l)\, d\eta \\ &\qquad = e^{-i\langle \xi, y\rangle} |\widetilde{\Omega}|^{-1} \sum_{l\in\Gamma} e^{-i\langle \xi, l\rangle} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle \eta, l\rangle} \left(e^{i\langle \eta, y\rangle} u(\eta, x, y)\right) \, d\eta = u(\xi, x, y). \end{aligned}$$

Следовательно, F^* также является и правым обратным к F и оператор F унитарен.

Если $u \in C^\infty(\Xi; \mathbb{C}^N)$ и быстро убывает по переменным y, то

$$(Fu)(\xi, x, y+l) = (Fu)(\xi, x, y), \quad l \in \Gamma,$$

а также

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} + i\xi_j\right)(Fu).$$

Если дополнительно $u(\cdot, y) \in \operatorname{Dom} a$ при всех y, то $(Fu)(\xi, \cdot, y) \in \operatorname{Dom} a$ при всех ξ, y. Действительно, в этом случае ряд (1.2.13) будет сходиться в $H^1(U; \mathbb{C}^N)$ при любом y, и $\operatorname{Dom} a$ полно относительно этой нормы (см. свойство 3 из определения a). В силу плотности указанных функций в $\operatorname{Dom} h$, получаем

$$F\colon \operatorname{Dom} h \to \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus H^1_{\mathrm{per},a}(U\times\Omega; \mathbb{C}^N)\, d\xi,$$

где

$$H^1_{\mathrm{per},a}(U\times\Omega; \mathbb{C}^N) = L_2(U; H^1_{\mathrm{per}}(\Omega; \mathbb{C}^N)) \cap L_2(\Omega; \operatorname{Dom} a),$$

$H^1_{\mathrm{per}}(\Omega; \mathbb{C}^N)$ — пространство Соболева с периодическими краевыми условиями на $\partial\Omega$.

В пространстве $L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)$ рассмотрим семейство полуторалинейных форм

$$h(\xi)[v_1,v_2]=\int\limits_{U\times\Omega}\langle(\nabla_y+i\xi)v_1(x,y),(\nabla_y+i\bar{\xi})v_2(x,y)\rangle\,dx\,dy+$$
$$+\int\limits_{\Omega}a[v_1(\cdot,y),v_2(\cdot,y)]\,dy+\int\limits_{U\times\Omega}\langle V(x,y)v_1(x,y),v_2(x,y)\rangle\,dx\,dy$$
$$+\int\limits_{\Sigma\cap(U\times\Omega)}\langle\sigma(x,y)v_1(x,y),v_2(x,y)\rangle\,dS(x,y),\quad \xi\in\mathbb{C}^m,\qquad(1.2.14)$$

с областями определения $\operatorname{Dom}h(\xi)=H^1_{\mathrm{per},a}(U\times\Omega,\mathbb{C}^N)$.

Лемма 1.2.3. *При каждом $\xi\in\mathbb{C}^m$ форма $h(\xi)$ замкнута и секториальна. Если V и σ фиксированы и удовлетворяют условию* (1.2.3)*, а ξ принадлежит ограниченному множеству в $\mathbb{C}^m$, то параметры γ и θ можно выбрать не зависящими от ξ.*

Доказательство. Пусть

$$h_0(\xi)[v,v]=h(\xi)[v,v]|_{V=0,\sigma=0}=$$
$$=\int\limits_{U\times\Omega}\langle(\nabla_y+i\xi)v(x,y),(\nabla_y+i\bar{\xi})v(x,y)\rangle\,dx\,dy$$
$$+\int\limits_{\Omega}a[v(\cdot,y),v(\cdot,y)]\,dy.\qquad(1.2.15)$$

Рассмотрим квадратичную форму $h_0(0)$. Эта форма замкнута и неотрицательна на $\operatorname{Dom}h(\xi)$. Заметим, что

$$\left|\int\limits_{U\times\Omega}\langle\xi v(x,y),\nabla_y v(x,y)\rangle\,dx\,dy\right|\leqslant\varepsilon\int\limits_{U\times\Omega}|\nabla_y v(x,y)|^2\,dx\,dy+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}|\xi|^2\int\limits_{U\times\Omega}|v(x,y)|^2\,dx\,dy$$
$$\leqslant\varepsilon h_0(0)[v,v]+C(\varepsilon,\xi)\|v\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)},\qquad(1.2.16)$$

откуда следует $h_0(0)$-ограниченность слагаемых, содержащих ξ. Ограниченность остальных слагаемых доказывается так же, как и в теореме 1.2.2, см. (1.2.9) и (1.2.11); легко видеть, что все константы в оценках зависят только от V, σ и $|\xi|$. Утверждение леммы теперь следует из теоремы 1.1.9 ∎

Наконец, прямым вычислением проверяется, что для $u, v \in \operatorname{Dom} h$

$$h[u,v] = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} h(\xi)[(Fu)(\xi),(Fv)(\xi)]\,d\xi.$$

Таким образом,

$$FHF^* = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus H(\xi)\,d\xi, \tag{1.2.17}$$

где $H(\xi)$ — оператор, отвечающий форме $h(\xi)$. Хотя в формуле (1.2.17) фигурируют операторы $H(\xi)$ только при $\xi \in \widetilde{\Omega}$, для доказательства отсутствия собственных чисел в спектре H нам понадобится квадратичная форма $h(\xi)$ и при комплексных ξ.

1.2.3 Критерий Томаса

Изучим подробнее свободный оператор $H_0(\xi)$, отвечающий квадратичной форме $h_0(\xi)$. Пусть A — оператор в $L_2(U;\mathbb{C}^N)$, отвечающий квадратичной форме a. Формально можно записать

$$H_0(\xi) = (\nabla_y + i\overline{\xi})^*(\nabla_y + i\xi) + A.$$

Спектр оператора A дискретен. Пусть λ_l — его собственные значения, а φ_l — ортонормированные в $L_2(U;\mathbb{C}^N)$ собственные функции, $l \in \mathbb{N}$. Тогда ортонормированными собственными функциями $H_0(\xi)$ в $L_2(U \times \Omega;\mathbb{C}^N)$ будут

$$\varphi_{l,n}(x,y) = |\Omega|^{-1/2} e^{iny} \varphi_l(x), \tag{1.2.18}$$

а собственными значениями —

$$h_{l,n}(\xi) = \langle n+\xi, n+\overline{\xi}\rangle + \lambda_l; \tag{1.2.19}$$

при различных ξ операторы $H_0(\xi)$ нормальны и коммутируют друг с другом.

Сформулируем условия, представляющие собой критерий Томаса. Пусть

$$\widetilde{\Omega}' = \{\xi' \in \mathbb{R}^m \mid \xi' \perp b_1, \text{ и } \exists \xi_1 \in \mathbb{R}\colon (\xi_1 b_1 + \xi') \in \widetilde{\Omega}\}. \tag{1.2.20}$$

Это ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, являющееся проекцией $\widetilde{\Omega}$ на гиперплоскость, ортогональную b_1. Любой вектор $\xi \in \widetilde{\Omega}$ допускает однозначное представление в виде $\xi = \xi_1 b_1 + \xi'$, где $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $\xi' \in \widetilde{\Omega}'$.

Условие A(q_1). *Пусть* $2 \leqslant q_1 < \infty$. *Для любого* $\xi' \in \widetilde{\Omega}'$ *существует* $\tau_0 > 0$, *такое что при* $\tau > \tau_0$

$$\| |H_0((\pi/|b_1| + i\tau)b_1 + \xi')|^{-1/2} u\|_{L_{q_1}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant C_1 \|u\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \qquad (1.2.21)$$

равномерно по $u \in L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)$.

Условие B(q_2). *Пусть* $2 \leqslant q_2 < \infty$. *Для любого* $\xi' \in \widetilde{\Omega}'$ *существует* $\tau_0 > 0$, *такое что при* $\tau > \tau_0$

$$\| |H_0((\pi/|b_1| + i\tau)b_1 + \xi')|^{-1/2} u\|_{L_{q_2}(\Sigma\cap(U\times\Omega);\mathbb{C}^N)} \leqslant C_2 \|u\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \quad (1.2.22)$$

равномерно по $u \in L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)$, *а также*

$$\| |H_0((\pi/|b_1| + i\tau)b_1 + \xi')|^{-1/2} u\|_{L_2(\Sigma\cap(U\times\Omega);\mathbb{C}^N)} \leqslant C_3(\tau) \|u\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \qquad (1.2.23)$$

равномерно по $u \in L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)$, *где* $C_3(\tau) \to 0$ *при* $\tau \to +\infty$.

Следующая теорема является основным результатом данной главы.

Теорема 1.2.4. *Пусть оператор* H *задан секториальной формой* (1.2.4) *с* V *и* σ, *удовлетворящими*

$$V \in L_{p_1,\mathrm{loc}}(\Xi; M_N(\mathbb{C})),\ p_1 \geqslant d/2, \quad \sigma \in L_{p_2,\mathrm{loc}}(\Sigma; M_N(\mathbb{C})),\ p_2 \geqslant d-1.$$

Предположим, что семейство операторов $H_0(\xi)$, *заданных формами* (1.2.15), *удовлетворяет условиям* A(q_1) *и* B(q_2) *с*

$$2 \leqslant q_1 \leqslant \frac{2d}{d-2}, \quad 2 \leqslant q_2 \leqslant \frac{2(d-1)}{d-2}, \quad q_i = 2p_i'.$$

Тогда у оператора H *нет собственных значений. Если* $V(x,y) = V(x,y)^*$, $\sigma(x,y) = \sigma(x,y)^*$, *то спектр оператора* H *абсолютно непрерывен.*

Для доказательства теоремы 1.2.4 нам понадобится

Лемма 1.2.5. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.4. Тогда для любых* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\xi' \in \widetilde{\Omega}'$, $\xi' \perp b_1$, *существует такое* $\tau_1 > 0$, *что*

$$\lambda \notin \sigma(H((\pi/|b_1| + i\tau)b_1 + \xi')), \quad \forall \tau > \tau_1.$$

Доказательство. Ясно, что условия леммы инвариантны относительно растяжения по переменным y. Поэтому для простоты будем считать $|b_1| = 1$. Операторы $H(\xi)$, $H_0(\xi)$ при $\xi = (\pi + i\tau)b_1 + \xi'$ будем для краткости обозначать через $H(\tau)$, $H_0(\tau)$ (допуская, тем самым, некоторую вольность речи). Оператор $H_0(\tau)$ в собственном базисе (1.2.18) является оператором умножения на символ

$$h_{l,n}(\tau) = |n + \pi b_1 + \xi'|^2 - \tau^2 + \lambda_l + 2i\tau\langle n + \pi b_1, b_1\rangle, \quad n \in \widetilde{\Gamma}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $\langle n, b_1\rangle \in 2\pi\mathbb{Z}$, откуда

$$|h_{l,n}(\tau)| \geqslant |\operatorname{Im} h_{l,n}(\tau)| = 2\tau|\langle n, b_1\rangle + \pi| \geqslant 2\pi\tau.$$

Следовательно,

$$(|H_0(\tau)|v, v) \geqslant 2\pi\tau\|v\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}, \quad \forall v \in \operatorname{Dom}(|H_0(\tau)|^{1/2}). \tag{1.2.24}$$

Лемма будет доказана, если мы установим, что для любого $v_1 \in \operatorname{Dom}(H(\tau))$, $\|v_1\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} = 1$, существует v_2, такое что $\|v_2\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} = 1$ и

$$|(H(\tau)v_1, v_2) - \lambda(v_1, v_2)| \geqslant C\tau \text{ при } \tau > \tau_1.$$

Рассмотрим полярное разложение

$$H_0(\tau) = \Phi_0(\tau)|H_0(\tau)|,$$

действие оператора $\Phi_0(\tau)$ в базисе (1.2.18) имеет вид

$$\Phi_0(\tau)\varphi_{l,n} = \frac{h_{l,n}(\tau)}{|h_{l,n}(\tau)|}\varphi_{l,n}.$$

Пусть $v_1 \in \operatorname{Dom}(H(\tau))$, $\|v_1\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} = 1$. Положим $v_2 = \Phi_0(\tau)v_1$. Имеем

$$\begin{aligned}(H_0(\tau)v_1, v_2) &= \||H_0(\tau)|^{1/2}v_1\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}\\ &= \|\Phi_0(\tau)|H_0(\tau)|^{1/2}v_1\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} = \||H_0(\tau)|^{1/2}v_2\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)},\end{aligned} \tag{1.2.25}$$

так как $\Phi_0(\tau)$ унитарен и коммутирует с $|H_0(\tau)|$. Из (1.2.24) следует

$$(H_0(\tau)v_1, v_2) = (|H_0(\tau)|v_1, v_1) \geqslant 2\pi\tau. \tag{1.2.26}$$

Пусть

$$V = V_\varepsilon + V_\infty, \quad \|V_\varepsilon\|_{L_{p_1}(U\times\Omega;M_n(\mathbb{C}))} \leqslant \varepsilon, \quad V_\infty \in L_\infty(U\times\Omega; M_N(\mathbb{C})).$$

В силу (1.2.26)

$$\left|\int\limits_{U\times\Omega} \langle V_\infty(x,y)v_1(x,y), v_2(x,y)\rangle\, dx\right| \leqslant \|V_\infty\|_{L_\infty(U\times\Omega;M_N(\mathbb{C}))} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi\tau)^{-1}\|V_\infty\|_{L_\infty(U\times\Omega;M_N(\mathbb{C}))}\||H_0(\tau)|^{1/2}v_1\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}\||H_0(\tau)|^{1/2}v_2\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}.$$

Из неравенства Гёльдера и условия $\mathrm{A}(q_1)$ вытекает

$$\left|\int\limits_{U\times\Omega}\langle V_\varepsilon(x,y)v_1(x,y),v_2(x,y)\rangle\,dx\right|\leqslant\varepsilon\|v_1\|_{L_{q_1}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}\|v_2\|_{L_{q_1}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}$$

$$\leqslant C_1^2\varepsilon\||H_0(\tau)|^{1/2}v_1\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}\||H_0(\tau)|^{1/2}v_2\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_{U\times\Omega}\langle V(x,y)v_1(x,y),v_2(x,y)\rangle\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant (C_1^2\varepsilon+\|V_\infty\|_{L_\infty(U\times\Omega;M_N(\mathbb{C}))}(2\pi\tau)^{-1})$$
$$\times\||H_0(\tau)|^{1/2}v_1\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}\||H_0(\tau)|^{1/2}v_2\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}.$$

Аналогично, пусть

$$\sigma=\sigma_\varepsilon+\sigma_\infty,\quad \|\sigma_\varepsilon\|_{L_{p_2}(\Sigma\cap(U\times\Omega);M_n(\mathbb{C}))}\leqslant\varepsilon,\quad \sigma_\infty\in L_\infty(\Sigma\cap(U\times\Omega);M_N(\mathbb{C})).$$

Точно так же

$$\left|\int\limits_{\Sigma\cap(U\times\Omega)}\langle\sigma(x,y)v_1(x,y),v_2(x,y)\rangle\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\big(C_2^2\varepsilon+C_3(\tau)^2\|\sigma_\infty\|_{L_\infty(\Sigma\cap(U\times\Omega);M_N(\mathbb{C}))}\big)$$
$$\times\||H_0(\tau)|^{1/2}v_1\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}\||H_0(\tau)|^{1/2}v_2\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}.$$

Объединяя оценки, получаем

$$|(H(\tau)v_1,v_2)-\lambda(v_1,v_2)|\geqslant$$

$$\geqslant(H_0(\tau)v_1,v_2)-|\lambda|-\left|\int\limits_{\Sigma\cap(U\times\Omega)}\langle\sigma(x,y)v_1(x,y),v_2(x,y)\rangle\,dS(x,y)\right|-$$

$$-\left|\int\limits_{U\times\Omega}\langle V(x,y)v_1(x,y),v_2(x,y)\rangle\,dx\,dy\right|$$

$$\geqslant(H_0(\tau)v_1,v_2)-|\lambda|-C_4(\varepsilon,\tau)\||H_0(\tau)|^{1/2}v_1\|_{L_2(U\times\Omega)}\||H_0(\tau)|^{1/2}v_2\|_{L_2(U\times\Omega)},$$

где

$$C_4(\varepsilon,\tau) = \left(C_1^2 + C_2^2\right)\varepsilon + C(\varepsilon)\left((2\pi\tau)^{-1} + C_3(\tau)^2\right),$$
$$C(\varepsilon) = \|V_\infty\|_{L_\infty} + \|\sigma_\infty\|_{L_\infty}.$$

Снова используя (1.2.25) и (1.2.26), получаем

$$|(H(\tau)v_1, v_2) - \lambda(v_1,v_2)| \geqslant (H_0(\tau)v_1, v_2) - |\lambda| - C_4(\varepsilon,\tau)(H_0(\tau)v_1, v_2)$$
$$\geqslant 2\pi\tau(1 - C_4(\varepsilon,\tau)) - |\lambda|.$$

Выбирая достаточно малое ε и достаточно большое τ, мы можем сделать $C_4(\varepsilon,\tau) < 1/2$, так как $C_3(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. ∎

Доказательство теоремы 1.2.4. Перепишем интеграл (1.2.17) в виде

$$FHF^* = \int\limits_{\widetilde{\Omega}'} \oplus\, d\xi' \int\limits_{I(\xi')} \oplus H(\xi_1 b_1 + \xi')\, d\xi_1,$$

где $I(\xi') = \{\xi_1 \in \mathbb{R}\colon \xi_1 b_1 + \xi' \in \widetilde{\Omega}\}$. Спектры операторов $H(\xi)$ дискретны, поскольку области определения квадратичных форм (1.2.14) компактно вкладываются в $L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)$. Следовательно, операторы $H(\xi_1 b_1 + \xi')$ при фиксированном ξ' образуют голоморфное семейство типа (B) по параметру $\xi_1 \in \mathbb{C}$ с компактной резольвентой. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Из леммы 1.2.5 следует, что множество

$$\{\xi_1 \in \mathbb{C}\colon \lambda \in \sigma_p(H(\xi_1 b_1 + \xi'))\} \tag{1.2.27}$$

не может совпадать со всем $\mathbb{C}$. По теореме 1.1.17 оно дискретно в $\mathbb{C}$, то есть не более чем счетно. Следовательно, по теореме Фубини множество $\{\xi \in \widetilde{\Omega}\colon \lambda \in \sigma_p(H(\xi))\}$ имеет меру нуль при любом λ. По теореме 1.1.25 отсюда следует, что $\sigma_p(H) = \varnothing$.

Если V и σ самосопряжены, семейство $H(\xi_1 b_1 + \xi')$ является самосопряженным голоморфным семейством типа (B) с компактной резольвентой, удовлетворяющим условиям теоремы 1.1.19. Множество (1.2.27) дискретно в $\mathbb{C}$ при любом ξ', поэтому среди функций μ_n из теоремы 1.1.19 не может быть постоянных. В этом случае в силу пункта 3 теоремы 1.1.23 спектры операторов

$$\int\limits_{I(\xi')} \oplus H(\xi_1 b_1 + \xi')\, d\xi_1$$

чисто абсолютно непрерывны при всех ξ', при которых $I(\xi')$ имеет ненулевую длину. Множество всех остальных ξ' имеет меру нуль. В силу пункта 2 той же теоремы спектр оператора H будет абсолютно непрерывным. ∎

Глава 2

Оценки сужений спектральных проекторов оператора Лапласа

2.1 Формулировка результата

Целью данной главы является замкнутое изложение доказательства следующей теоремы из [9] для случая d-мерного тора.

Теорема 2.1.1. *Пусть M — гладкое компактное d-мерное риманово многообразие без края, $d \geqslant 3$. Пусть $\Sigma \subset M$ — компактная C^d-гладкая гиперповерхность (то есть подмногообразие размерности $d-1$). Пусть $E_\lambda = E_{-\Delta}[(\lambda-1)^2; \lambda^2)$ — спектральный проектор оператора Лапласа-Бельтрами на M. Тогда*

$$\|E_\lambda f\|_{L_r(\Sigma)} \leqslant C\lambda^{\frac{d-1}{2}-\frac{d-1}{r}}\|f\|_{L_2(M)},\qquad \forall f \in L_2(M),\ \forall \lambda \geqslant 1, \quad \frac{2d}{d-1} < r \leqslant +\infty. \tag{2.1.1}$$

Для наших дальнейших целей случая $M = \mathbb{T}^d$ достаточно. Мы им ограничиваемся также чтобы избежать дополнительных сложностей технического характера. Оригинальное доказательство было приведено для случая $\Sigma \in C^\infty$, однако фактически там использовалась только гладкость порядка d, что будет также показано. В случае, если $\partial\Sigma \neq \varnothing$, мы также предполагаем, что $\partial\Sigma \in C^d$.

Хотя нам этот факт в дальнейшем не понадобится, отметим, что теорема 2.1.1 верна и при $d = 2$, причем при более слабом условии $\Sigma \in C^1$. Доказательство в этом случае только проще (см. ниже замечания 2.2.8 и 2.3.2).

В разделах 2.2 и 2.3 мы получаем оценки различных интегральных операторов. В разделе 2.4 на основе этих оценок мы доказываем теорему 2.1.1.

2.2 Вспомогательные утверждения

2.2.1 Метод стационарной фазы

Следующие две теоремы доказаны в [57, Теоремы 7.7.1, 7.7.5]. Мы будем применять их при оценках интегралов методом стационарной фазы.

Теорема 2.2.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество, X — открытая окрестность K, пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Если $f \in C^{k+1}(X;\mathbb{R})$, $u \in C_0^k(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{supp} u \subset K$, то*

$$\omega^k \left| \int\limits_{\mathbb{R}^m} u(x) e^{i\omega f(x)}\, dx \right| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_K |D^\alpha u| |\nabla f|^{|\alpha| - 2k}, \quad \omega > 0,$$

причем постоянную C можно выбрать одной для всех f, принадлежащих заданному ограниченному множеству в $C^{k+1}(X)$.

Утверждение теоремы 2.2.1 имеет смысл только при $\nabla f \neq 0$ на K, то есть при отсутствии точек стационарной фазы. Следующая теорема дает асимптотическое разложение интеграла в случае наличия таких точек.

Теорема 2.2.2. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество, X — открытая окрестность K, пусть $k \in \mathbb{N}$. Если $u \in C_0^{2k}(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{supp} u \subset K$, $f \in C^{3k+1}(X;\mathbb{R})$, $f'(x_0) = 0$, $\det f''(x_0) \neq 0$, $f' \neq 0$ в $K \setminus \{x_0\}$, то*

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^m} u(x) e^{i\omega f(x)}\, dx - e^{i\omega f(x_0)} \left(\det(\omega f''(x_0)/(2\pi i)) \right)^{-1/2} \sum_{j<k} \omega^{-j} (L_j u)(x_0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C\omega^{-k} \sum_{|\alpha| \leqslant 2k} \sup_K |D^\alpha u|, \quad \omega > 0,$$

где постоянную C можно выбрать одной и той же для всех f, принадлежащих заданному ограниченному множеству в $C^{3k+1}(X)$ и для которых отношение $|x - x_0|/|f'(x)|$ равномерно ограничено. Здесь L_j — дифференциальные операторы порядка $2j$ с коэффициентами, зависящими от f и ее производных вплоть до порядка $2j + 2$.

Замечание 2.2.3. Утверждения теорем 2.2.1 и 2.2.2 остаются верными, если заменить $\mathbb{R}^m$ на гладкое компактное m-мерное многообразие без края. Доказательство проводится стандартным образом с помощью разбиения единицы и применения теорем 2.2.1 и 2.2.2 к координатным окрестностям.

2.2.2 Интегральные операторы в $\mathbb{R}^m$

Следующая теорема доказана в [3].

Теорема 2.2.4 (Интерполяционная теорема Рисса-Торина)**.** *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — пространства с мерой. Пусть T — линейный оператор на пространстве $L_{p_0}(\mathcal{X}) + L_{p_1}(\mathcal{X})$, такой что*

$$T\colon L_{p_0}(\mathcal{X}) \to L_{q_0}(\mathcal{Y})$$

с нормой $\|T\|_{L_{p_0}(\mathcal{X})\to L_{q_0}(\mathcal{Y})} = M_0$ и

$$T\colon L_{p_1}(\mathcal{X}) \to L_{q_1}(\mathcal{Y})$$

с нормой $\|T\|_{L_{p_1}(\mathcal{X})\to L_{q_1}(\mathcal{Y})} = M_1$, где $1 \leqslant p_1, q_1, p_2, q_2 \leqslant +\infty$. Тогда

$$T\colon L_p(\mathcal{X}) \to L_q(\mathcal{Y})$$

с нормой $\|T\|_{L_p(\mathcal{X})\to L_q(\mathcal{Y})} = M \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, где

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Лемма 2.2.5 (Критерий Шура для интегральных операторов)**.** *Пусть T — интегральный оператор в $\mathbb{R}^m$ с ядром $T(z,z')$. Пусть $p \geqslant 2$,*

$$\sup_z \|T(z,\cdot)\|_{L_{p/2}(\mathbb{R}^m)} \leqslant C_0, \quad \sup_{z'} \|T(\cdot,z')\|_{L_{p/2}(\mathbb{R}^m)} \leqslant C_0.$$

Тогда

$$\|T\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^m)\to L_p(\mathbb{R}^m)} \leqslant C_0, \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{2.2.1}$$

Доказательство. По неравенству Гёльдера

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^m} T(z,z') f(z')\, dz' \right| \leqslant \|T(z,\cdot)\|_{L_{p/2}(\mathbb{R}^m)} \|f\|_{L_{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m)},$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^m} \overline{T(z',z)} f(z')\,dz'\right| \leqslant \|T(\cdot,z)\|_{L_{p/2}(\mathbb{R}^m)} \|f\|_{L_{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m)},$$

откуда

$$\|T\|_{L_{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m)\to L_\infty(\mathbb{R}^m)} \leqslant C_0, \quad \|T^*\|_{L_{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^m)\to L_\infty(\mathbb{R}^m)} \leqslant C_0, \tag{2.2.2}$$

где T^* — оператор, сопряженный к T, с ядром $\overline{T(z',z)}$. Из второго неравенства по двойственности следует

$$\|T\|_{L_1(\mathbb{R}^m)\to L_{p/2}(\mathbb{R}^m)} \leqslant C_0. \tag{2.2.3}$$

Неравенство (2.2.1) получается применением теоремы 2.2.4 к первому неравенству из (2.2.2) и (2.2.3). ∎

Следующая лемма и следствие из нее являются аналогом [37, Theorem 2.1.1] и [38, Proposition IX.1.1] в случае, если ранг гессиана фазовой функции не является максимальным (см. условие (2.2.8)), а гладкость конечна. Доказательство, по сути, не отличается. Через $B^k_D(0)$ мы обозначаем открытый шар в $\mathbb{R}^k$ радиуса D с центром в нуле; иногда мы будем опускать размерность k, если ее значение ясно из контекста.

Лемма 2.2.6. *Пусть*

$$\Phi \in C^{m+2}(\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}), \quad a \in C_0^m(\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^m),$$
$$\operatorname{supp} a \subset B_D^{m+1}(0)\times B_D^m(0),$$

Предположим, что

$$\left|\det \frac{\partial^2\Phi(x_1,x',y)}{\partial x'_i \partial y_j}\right| \geqslant c > 0, \quad \forall x,y \in B_D^{m+1}(0)\times B_D^m(0),$$

где $x_1 \in \mathbb{R}$, $x=(x_1,x') \in \mathbb{R}^{m+1}$, $y \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{i\lambda\Phi(x,y)} a(x,y) f(y)\,dy\right\|_{L_2(\mathbb{R}^{m+1})} \leqslant C\lambda^{-m/2}\sqrt{\ln(1+\lambda)}\,\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^m)}, \quad \lambda \geqslant 1,$$

где C зависит только от $\|a\|_{C^m(B_D^{m+1}(0)\times B_D^m(0))}$, $\|\Phi\|_{C^{m+2}(B_D^{m+1}(0)\times B_D^m(0))}$, m, c, D.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. С помощью разбиения единицы утверждение можно свести к случаю, когда

$$\operatorname{supp} a \subset \{(x,y) : |x - x_0| + |y - y_0| \leqslant \varepsilon\}. \tag{2.2.4}$$

Мы выберем ε позднее, оно будет зависеть от Φ и от D, но не от a.

Пусть T — интегральный оператор с ядром $T(x,y) = e^{i\lambda\Phi(x,y)}a(x,y)$. Тогда оператор $K = T^*T$ имеет ядро

$$K(y,z) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} \overline{T(x,y)}T(x,z)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} e^{-i\lambda(\Phi(x,y)-\Phi(x,z))}\overline{a(x,y)}a(x,z)\,dx. \tag{2.2.5}$$

Носитель $K(y,z)$ содержится во множестве $B_D^m(0) \times B_D^m(0)$. Мы покажем, что

$$|K(y,z)| \leqslant C(1 + \lambda|y - z|)^{-m} \tag{2.2.6}$$

равномерно по y, z. Рассмотрим функцию

$$h_{y,z}(x) = \frac{\Phi(x,y) - \Phi(x,z)}{|y - z|}.$$

Эта функция определена при $y \neq z$. Поскольку $\Phi \in C^{m+2}(\mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^m)$, функция $h_{y,z}$ ограничена как элемент $C^{m+1}(\mathbb{R}^{m+1})$ равномерно по параметрам y, z. Вычислим ее градиент по переменной x'. Используя формулу Тейлора по переменной y в окрестности точки z, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}h_{y,z}(x) = \frac{1}{|y-z|}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x_i'\partial y_j}(y_j - z_j) + O(|y-z|^2)\right) = \\ = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x_i'\partial y_j}\frac{y_j - z_j}{|y-z|} + O(|y-z|). \tag{2.2.7}$$

В силу нижней оценки на $\left|\det \frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x_i'\partial y_j}\right|$ можно считать, что

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x_i'\partial y_j}\frac{y_j - z_j}{|y-z|}\right| \geqslant c'.$$

В силу (2.2.5) и (2.2.4) на носителе K выполняется $|y - z| \leqslant 2\varepsilon$. Выберем ε, упоминавшееся в начале доказательства, так, чтобы поправочный член в (2.2.7) не превосходил $c'/2$. Ясно, что для этого достаточно ограниченности $\frac{\partial^3\Phi(x,y)}{\partial x_i'\partial y_j\partial y_k}$ и, следовательно, ε можно сделать зависящим только от $\|\Phi\|_{C^3}$ и от диаметра исходного носителя a. Таким образом, можно добиться неравенства

$$|\nabla_x h_{y,z}(x)| \geqslant |\nabla_{x'} h_{y,z}(x)| \geqslant c'/2.$$

Неравенство (2.2.6) теперь следует из теоремы 2.2.1 с $k = m$, $\omega = \lambda|y-z|$, $f(x) = -h_{y,z}(x)$. Далее, используя лемму 2.2.5 при $p = 2$, получаем

$$\begin{aligned}\|T\|^2_{L_2(\mathbb{R}^m)\to L_2(\mathbb{R}^{m+1})} &= \|T^*T\|_{L_2(\mathbb{R}^m)\to L_2(\mathbb{R}^m)} = \|K\|_{L_2(\mathbb{R}^m)\to L_2(\mathbb{R}^m)} \\ &\leqslant C \sup_{y\in B^m_D(0)} \int\limits_{B^m_D(0)} \frac{dx}{(1+\lambda|x-y|)^m} \leqslant C \int\limits_{B^m_{2D}(0)} \frac{dx}{(1+\lambda|x|)^m} \\ &= C\lambda^{-m} \int\limits_{B^m_{2\lambda D}(0)} \frac{dx}{(1+|x|)^m} \leqslant C_m \lambda^{-m} \ln(1+\lambda). \blacksquare\end{aligned}$$

Следствие 2.2.7. *Пусть*

$$\Phi \in C^{m+2}(\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^{m+1};\mathbb{R}), \quad a \in C^m_0(\mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^{m+1}),$$

$$\operatorname{supp} a \subset B^{m+1}_D(0)\times B^{m+1}_D(0).$$

Предположим, что

$$\left|\det \frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x'_i \partial y'_j}\right| \geqslant c > 0 \ \forall x,y \in B^{m+1}_D(0)\times B^{m+1}_D(0), \tag{2.2.8}$$

где $(x,y) = (x_1, x', y_1, y') \in \mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^{m+1}$, $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, $x', y' \in \mathbb{R}^m$. *Тогда*

$$\begin{aligned}&\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} e^{i\lambda\Phi(x,y)} a(x,y) f(y)\,dy\right\|_{L_2(\mathbb{R}^{m+1})} \leqslant \\ &\qquad\leqslant C\lambda^{-m/2}\sqrt{\ln(1+\lambda)}\,\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^{m+1})}, \quad \lambda \geqslant 1.\end{aligned}$$

где C *зависит только от* $\|a\|_{C^m(B^{m+1}_D(0)\times B^{m+1}_D(0))}$, $\|\Phi\|_{C^{m+2}(B^{m+1}_D(0)\times B^{m+1}_D(0))}$, m, c, D.

Доказательство. При фиксированном y_1 функции a, Φ удовлетворяют условиям леммы 2.2.6. Пусть T — интегральный оператор с ядром $T(x,y) = e^{i\lambda\Phi(x,y)}a(x,y)$. Тогда

$$\|Tf\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{m+1})} = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} dx \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} T(x,y) f(y)\,dy\right|^2.$$

Перепишем внутренний интеграл как повторный по y_1, y' и применим неравенство Коши-Буняковского к интегралу по y_1, воспользовавшись тем, что носитель T по переменной y содержится в $B_D^{m+1}(0)$. Затем применим лемму 2.2.6:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} dx \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} T(x,y) f(y_1, y')\, dy'\, dy_1 \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2D \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} dx \int\limits_{\mathbb{R}} dy_1 \left| \int\limits_{\mathbb{R}^m} T(x,y) f(y_1, y')\, dy' \right|^2$$

$$= 2D \int\limits_{\mathbb{R}} dy_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{m+1}} dx \left| \int\limits_{\mathbb{R}^m} T(x,y) f(y_1, y')\, dy' \right|^2$$

$$\leqslant 2D\lambda^{-m} \ln(1+\lambda) \int\limits_{\mathbb{R}} C(y_1) \|f(y_1, \cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^m)}\, dy_1$$

$$\leqslant 2CD\lambda^{-m} \ln(1+\lambda) \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{m+1})}.$$

Мы имеем $C(y_1) \leqslant C$, поскольку условия леммы 2.2.6 выполнены для $T(x,y)$ равномерно по y_1. ∎

Замечание 2.2.8. Для доказательства аналога теоремы 2.1.1 при $d = 2$ нужен следующий очевидный аналог следствия 2.2.7 при $m = 0$: пусть Φ – вещественная функция, a – ограниченная функция с компактным носителем. Тогда

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\Phi(x,y)} a(x,y) f(y)\, dy \right\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Лемма 2.2.9. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\lambda \geqslant 1$, $2^{j_0-1} < \lambda \leqslant 2^{j_0}$, $j_0 \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{\alpha j} \left(\ln\left(1 + \frac{\lambda}{2^j}\right)\right)^\beta \leqslant C(\alpha,\beta)\lambda^\alpha. \tag{2.2.9}$$

Доказательство. Ясно, что последнее слагаемое удовлетворяет указанной оценке. Все слагаемые, кроме, возможно, последнего, могут только увеличиться при увеличении β. Следовательно, достаточно ограничиться случаем $\beta = 1$. Воспользовавшись тождествами

$$\sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{\alpha j} = \frac{2^{\alpha j_0} - 1}{2^\alpha - 1}, \quad \sum_{j=0}^{j_0-1} j 2^{\alpha j} = \frac{j_0 2^{\alpha j_0}}{2^\alpha - 1} - (2^{\alpha j_0} - 1)\frac{2^\alpha}{(2^\alpha - 1)^2},$$

оценим левую часть (2.2.9) при $\beta = 1$ через

$$\sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{\alpha j}(\ln(2^j+\lambda) - \ln 2^j) \leqslant \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{\alpha j}(\ln 2 + \ln\lambda - j\ln 2)$$
$$\leqslant C(\alpha)2^{\alpha j_0} + \frac{2^{\alpha j_0}}{2^\alpha - 1}(\ln\lambda - j_0\ln 2) \leqslant C_1(\alpha)\lambda^\alpha. \ \blacksquare$$

2.3 Основная оценка

Теорема 2.3.1. *Пусть $d \geqslant 3$. Для любой гладкой компактной C^d-гиперповерхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой функции $R \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} R \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 2\varepsilon\}$, выполняется*

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{\pm i\lambda|x-y|} R(x-y) g(y)\, dy \right\|_{L_r(\Sigma)} \leqslant C(R)\lambda^{-\frac{d-1}{r}} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$
$$\frac{2d}{d-1} < r \leqslant +\infty, \quad \lambda \geqslant 1. \quad (2.3.1)$$

Доказательство будет состоять из нескольких шагов.
1. Определение оператора $\mathcal{K}$. В случае, если $\partial\Sigma \neq \varnothing$, стандартные аргументы о продолжении гладких функций позволяют представить $\Sigma \subset \cup_{i=1}^M \Sigma_i$, где Σ_i — C^d-гладкие подмногообразия без края. Утверждение теоремы достаточно доказывать для каждой Σ_i отдельно (так как при переходе к подмножеству L_p-норма может только уменьшиться). Таким образом, не умаляя общности, можно считать $\partial\Sigma = \varnothing$. Мы ограничимся только показателем степени $-i\lambda|x-y|$; случай с другим знаком полностью аналогичен.

Поскольку ядро оператора в формулировке теоремы зависит только от $x-y$, можно произвести сдвиг системы координат и считать, что $0 \in \Sigma$. С помощью разбиения единицы задача сводится к оценке оператора T с ядром

$$T(x,y) = e^{-i\lambda|x-y|}\alpha(x)R(x-y),$$

где $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}\alpha \subset B^d_{\varepsilon/4}(0)$. При этом, говоря о константах, зависящих только от Σ, мы будем подразумевать, что они не меняются при поворотах и сдвигах Σ.

Сопряженный оператор T^* имеет ядро

$$T^*(x,y) = e^{i\lambda|x-y|}\alpha(y)\overline{R(y-x)}.$$

По двойственности имеем

$$\|T\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_r(\Sigma)} = \|T^*\|^2_{L_{r'}(\Sigma)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \|TT^*\|_{L_{r'}(\Sigma)\to L_r(\Sigma)}.$$

Таким образом, утверждение теоремы сводится к оценке

$$\|TT^*\|_{L_{r'}(\Sigma)\to L_r(\Sigma)} \leqslant C\lambda^{-\frac{2(d-1)}{r}},$$

где ядро оператора TT^* имеет вид

$$\mathcal{K}(x,x') = \int\limits_{B^d_{9\varepsilon/4}(0)} e^{-i\lambda(|x-y|-|x'-y|)}\alpha(x)\alpha(x')R(x-y)\overline{R(x'-y)}\,dy. \qquad (2.3.2)$$

2. Асимптотическое разложение $\mathcal{K}(x,x')$. При $x \neq x'$ построим асимптотическое разложение ядра $\mathcal{K}(x,x')$ с помощью метода стационарной фазы. Носитель подынтегрального выражения (2.3.2) по y содержится в шаровом слое с центром в нуле, внутренним радиусом $3\varepsilon/4$ и наружным радиусом $9\varepsilon/4$. Рассмотрим сферическую систему координат с центром в x', $y = x' + r\theta$, $\theta \in S^{d-1}$, $r \geqslant 0$, и запишем интеграл как повторный по r и по θ. В силу свойств носителя R можно ограничиться $\varepsilon \leqslant r \leqslant 2\varepsilon$,

$$\mathcal{K}(x,x') = \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} r^{d-1} \int\limits_{S^{d-1}} e^{-i\lambda(|x-x'-r\theta|-r)}\alpha(x)\alpha(x')R(x-x'-r\theta)\overline{R(-r\theta)}\,d\theta\,dr. \qquad (2.3.3)$$

Из свойств носителя α следует, что $|x-x'| \leqslant \varepsilon/2 < r$. Поэтому выражение $|x-x'-r\theta|-r$ имеет ровно две критические точки $\theta_\pm = \pm\frac{x-x'}{|x-x'|}$. Представим сферу S^{d-1} в виде объединения двух координатных окрестностей, одна из которых содержит точку θ_+, а другая — точку θ_-. Рассмотрим окрестность θ_+. Пусть φ — угол между θ и вектором $x-x'$. Тогда по теореме косинусов

$$\begin{aligned}|x-x'-r\theta|-r &= \sqrt{|x-x'|^2+r^2-2r|x-x'|\cos\varphi}-r\\ &= \sqrt{(r-|x-x'|)^2+r|x-x'|\varphi^2}-r+O(\varphi^4)\\ &= -|x-x'|+\frac{r|x-x'|}{2(r-|x-x'|)}\varphi^2+O(\varphi^4). \qquad (2.3.4)\end{aligned}$$

Перепишем фазовую функцию в виде

$$\begin{aligned}\Psi(x,x',r,\theta) = \frac{|x-x'-r\theta|-r}{|x-x'|} &= \frac{\sqrt{|x-x'|^2+r^2-2r|x-x'|\cos\varphi}-r}{|x-x'|}\\ &= \frac{|x-x'|-2r\cos\varphi}{r+\sqrt{(r-|x-x'|)^2+2r|x-x'|(1-\cos\varphi)}}.\end{aligned}$$

Ясно, что зависимость Ψ от переменных θ сводится к зависимости от φ, и что Ψ монотонна по φ, $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} > 0$ при $\varphi \in (0;\pi)$. Поскольку $r - |x-x'| \geqslant \varepsilon/2$, знаменатель в правой части последнего равенства отделен от нуля, откуда следует ограниченность любого количества производных функции Ψ по θ, если $|x - x'|$ и r принадлежат ограниченному множеству. Покажем ограниченность выражения $\frac{|\theta-\theta_+|}{|\nabla_\theta \Psi(x,x',r,\theta)|}$ вне окрестности θ_-. В силу (2.3.4) это выполняется в малой окрестности θ_+, причем эту окрестность можно выбрать равномерно по x, x'. Таким образом, достаточно оценить $|\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}|$ снизу при $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varphi_0$ для некоторого $\varphi_0 > 0$. Легко видеть, что $\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$ является непрерывной функцией x, x' и φ, причем множество, на котором требуется оценка снизу, замкнуто и ограничено. Следовательно, эта производная отделена от нуля.

Точно так же рассматривается вторая координатная окрестность. Применяя теорему 2.2.2 (см. также замечание 2.2.3) с $\omega = \lambda|x - x'|$ для каждой из окрестностей, для внутреннего интеграла по сфере в (2.3.3) можно построить асимптотическое разложение при $x \neq x'$,

$$\int\limits_{S^{d-1}} e^{-i\lambda(|x-x'-r\theta|-r)}\alpha(x)\alpha(x')R(x-x'-r\theta)\overline{R(-r\theta)}\,d\theta =$$
$$= \sum_{k=0}^{N}(\lambda|x-x'|)^{-\frac{d-1}{2}-k}\left(\widetilde{G}_k^+(x,x',r)e^{i\lambda|x-x'|} + \widetilde{G}_k^-(x,x',r)e^{-i\lambda|x-x'|}\right)$$
$$+ \widetilde{G}_N(x,x',r,\lambda),$$

причем коэффициенты разложения являются гладкими функциями при $x \neq x'$, и все их производные равномерно ограничены по r. Интегрируя по параметру r, получаем разложение интеграла (2.3.3)

$$\mathcal{K}(x,x') = \sum_{k=0}^{N}(\lambda|x-x'|)^{-\frac{d-1}{2}-k}\left(G_k^+(x,x')e^{i\lambda|x-x'|} + G_k^-(x,x')e^{-i\lambda|x-x'|}\right)$$
$$+ G_N(x,x',\lambda), \quad (2.3.5)$$

справедливое при $x \neq x'$. Здесь $|G_N(x,x',\lambda)| \leqslant C(\lambda|x-x'|)^{-(N+1)}$, а $G_k^\pm(x,x')$ — гладкие функции, $\operatorname{supp} G_k^\pm \subset \operatorname{supp}\alpha \times \operatorname{supp}\alpha$.

3. Оценка диагональной части и остатка асимптотики. Мы будем оценивать норму оператора с ядром (2.3.5) из $L_{r'}(\Sigma)$ в $L_r(\Sigma)$. Для этого введем локальные координаты на Σ. Пусть $\varepsilon' = C\varepsilon$, где C будет выбрано позднее и будет зависеть только от поверхности. Рассмотрим касательную гиперплоскость к Σ в нуле и отождествим ее с $\mathbb{R}^{d-1}$. Пусть координатной окрестностью будет $x\colon B_{\varepsilon'}^{d-1}(0) \to \Sigma$, где $B_{\varepsilon'}(0) \subset \mathbb{R}^{d-1}$ —

шар радиуса ε', так что z является проекцией $x(z)$ на касательную плоскость; иначе говоря, соответствующая часть Σ — график C^d-функции $x(z)$. Будем считать C достаточно большим (возможно, уменьшив ε), чтобы

$$\operatorname{supp}\mathcal{K}\cap(\Sigma\times\Sigma)\subset x(B_{\varepsilon'/2}(0))\times x(B_{\varepsilon'/2}(0)).$$

Отметим, что ε' и C зависят только от поверхности Σ; в конце доказательства на ε' будет наложено дополнительное условие, тоже зависящее только от Σ. *В дальнейшем, если не указано обратного, константы можно выбрать зависящими только от Σ, ε' и r.*

Наконец, пусть $K(z,z') = \mathcal{K}(x(z),x(z'))$. Эта функция задана для $z,z'\in B_{\varepsilon'}(0)$. Продолжим это ядро нулем на $\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}^{d-1}$ (по построению, это не нарушит гладкости). Через K будем обозначать оператор с ядром $K(z,z')$. Достаточно оценить норму этого оператора из $L_{r'}(\mathbb{R}^{d-1})$ в $L_r(\mathbb{R}^{d-1})$, так как гладкая замена переменных не меняет пространств L_p. Мы покажем, что

$$\|Ku\|_{L_r(\mathbb{R}^{d-1})}\leqslant C\lambda^{-\frac{2(d-1)}{r}}\|u\|_{L_{r'}(\mathbb{R}^{d-1})}. \tag{2.3.6}$$

Пусть $\tilde\mu\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ — функция, зависящая только от $|z|$, равная 1 при $|z|\leqslant 1$ и 0 при $|z|\geqslant 2$ и не возрастающая как функция $|z|$. Пусть $\mu(z)=\tilde\mu(z)-\tilde\mu(2z)$, тогда $\operatorname{supp}\mu\subset\{z\colon \frac12\leqslant|z|\leqslant 2\}$. Пусть $2^{j_0-1}<\lambda\leqslant 2^{j_0}$. Имеем

$$\tilde\mu(2^{j_0}z)+\sum_{j=0}^{j_0-1}\mu(2^jz)=\tilde\mu(z)=1\quad\text{при } |z|\leqslant 1. \tag{2.3.7}$$

Рассмотрим интегральный оператор с ядром $\tilde\mu(2^{j_0}(z-z'))K(z,z')$. Функция $\mathcal{K}$ равномерно ограничена в L_∞. Отсюда

$$\|\tilde\mu(2^{j_0}(z-\cdot))K(z,\cdot)\|_{L_{r/2}(\mathbb{R}^{d-1})}\leqslant C\lambda^{-\frac{2(d-1)}{r}}, \tag{2.3.8}$$

$$\|\tilde\mu(2^{j_0}(\cdot-z'))K(\cdot,z')\|_{L_{r/2}(\mathbb{R}^{d-1})}\leqslant C\lambda^{-\frac{2(d-1)}{r}}, \tag{2.3.9}$$

так как размер области интегрирования равен $O(\lambda^{-1})$. Поэтому из леммы 2.2.5 следует оценка (2.3.6) для ядра $\tilde\mu(2^{j_0}(z-z'))K(z,z')$. Далее, в силу свойств носителя $\tilde\mu$,

$$(1-\tilde\mu(2^{j_0}(z-z')))G_N(x(z),x(z'),\lambda)\leqslant C_N(1+\lambda|z-z'|)^{-(N+1)},$$

откуда вытекает, что для ядра $(1-\tilde\mu(2^{j_0}(z-z')))G_N(x(z),x(z'),\lambda)$ при $N+1>\frac{2(d-1)}{r}$ выполняются оценки типа (2.3.8), (2.3.9), а следовательно, и (2.3.6).

4. Двоичное разложение и интерполяция. Таким образом, осталось доказать оценку (2.3.6) для оператора с ядром вида

$$H_k(z,z') = (1-\tilde\mu(2^{j_0}(z-z')))(\lambda d(z,z'))^{-\frac{d-1}{2}-k} b(z,z')e^{\pm i\lambda d(z,z')},$$

где $d(z,z') = |x(z)-x(z')|$, $\operatorname{supp} b \subset B_{\varepsilon'/2}(0)\times B_{\varepsilon'/2}(0)$. Функция b и все ее производные (вплоть до порядка гладкости функции $x(z)$, то есть поверхности Σ) равномерно ограничены некоторой константой, зависящей от Σ и от ε'. Мы ограничимся знаком «+» в экспоненте, знак «−» рассматривается аналогично.

Положим

$$K_j(z,z') = \mu(2^j(z-z'))(\lambda d(z,z'))^{-\frac{d-1}{2}-k} b(z,z')e^{i\lambda d(z,z')}.$$

В силу (2.3.7), имеем

$$H_k(z,z') = \sum_{j=0}^{j_0-1} K_j(z,z'). \tag{2.3.10}$$

Мы покажем, что

$$\|K_j\|_{L_1(\mathbb{R}^{d-1})\to L_\infty(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant C\left(\frac{\lambda}{2^j}\right)^{-(d-1)/2}, \tag{2.3.11}$$

$$\|K_j\|_{L_2(\mathbb{R}^{d-1})\to L_2(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant C\lambda^{-(d-1)}\left(\frac{\lambda}{2^j}\right)^{1/2}\sqrt{\ln\left(1+\frac{\lambda}{2^j}\right)}. \tag{2.3.12}$$

Предположим, что обе оценки доказаны. Тогда в силу теоремы 2.2.4, для $\theta = 2/r$ имеем

$$\begin{aligned}\|K_j\|_{L_{r'}(\mathbb{R}^{d-1})\to L_r(\mathbb{R}^{d-1})} &\leqslant C\left(\frac{\lambda}{2^j}\right)^{-\frac{(1-\theta)(d-1)}{2}} \lambda^{-(d-1)\theta}\left(\frac{\lambda}{2^j}\ln\left(1+\frac{\lambda}{2^j}\right)\right)^{\frac{\theta}{2}} \\ &= C\left(\frac{\lambda}{2^j}\right)^{\frac12-d\left(\frac12-\frac1r\right)}\lambda^{-\frac{2(d-1)}{r}}\left(\ln\left(1+\frac{\lambda}{2^j}\right)\right)^{\frac1r}.\end{aligned}$$

Суммируя по $0\leqslant j\leqslant j_0-1$ и используя (2.3.10), получаем, что при $r>\frac{2d}{d-1}$, то есть положительном показателе степени двойки, сумма оценивается через

$$\begin{aligned}&\lambda^{\frac12-d\left(\frac12-\frac1r\right)-\frac{2(d-1)}{r}}\sum_{j=0}^{j_0-1}2^{j\left(d\left(\frac12-\frac1r\right)-\frac12\right)}\left(\ln\left(1+\frac{\lambda}{2^j}\right)\right)^{\frac1r}\leqslant \\ &\qquad\leqslant C\lambda^{\frac12-d\left(\frac12-\frac1r\right)-\frac{2(d-1)}{r}}\lambda^{d\left(\frac12-\frac1r\right)-\frac12} = C\lambda^{-\frac{2(d-1)}{r}}\end{aligned}$$

по лемме 2.2.9. Следовательно,

$$\|H_k\|_{L_{r'}(\mathbb{R}^{d-1})\to L_r(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant C\lambda^{-\frac{2(d-1)}{r}},$$

откуда следует утверждение теоремы.

Докажем (2.3.11). Заметим, что на области, на которой $K_j(z,z')\neq 0$, имеет место оценка $C_1 2^{-j}\leqslant |x(z)-x(z')|\leqslant C_2 2^{-j}$. Поэтому

$$|K_j(z,z')|\leqslant C\lambda^{-\frac{d-1}{2}-k}2^{j\left(\frac{d-1}{2}+k\right)}\leqslant C2^{j(d-1)/2}\lambda^{-(d-1)/2},$$

так как $2^j\leqslant\lambda$, откуда сразу вытекает (2.3.11).

5. Доказательство оценки (2.3.12): локализация. Итак, нужно оценить действие из $L_2(\mathbb{R}^{d-1})$ в $L_2(\mathbb{R}^{d-1})$ интегрального оператора с ядром

$$K_j(z,z') = e^{i\lambda d(z,z')}\frac{\mu(2^j(z-z'))}{(\lambda d(z,z'))^{\frac{d-1}{2}+k}}b(z,z').$$

Пусть $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ — такая неотрицательная функция, что

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}^{d-1}}\eta(z-p)=1,\quad \operatorname{supp}\eta\subset B_2^{d-1}(0)\subset\mathbb{R}^{d-1}.$$

Тогда

$$K_j(z,z')=\sum_{q,q'}K_{q,q'}(z,z')=\sum_{q,q'}\eta(2^jz-q)\eta(2^jz'-q')K_j(z,z'). \quad (2.3.13)$$

Для упрошения обозначений мы будет опускать зависимость $K_{q,q'}$ от j и далее считать j фиксированным. При $|q-q'|\geqslant 6$ имеем $K_{q,q'}=0$ (так как $\operatorname{diam}\operatorname{supp}\eta=4$, а на носителе K_j выполняется $|2^jz-2^jz'|\leqslant 2$). Пусть $S_{q,j}$, $q\in\mathbb{Z}^{d-1}$, — подпространство в $L_2(\mathbb{R}^{d-1})$, состоящее из функций, равных нулю вне шара $B^{d-1}_{2^{-j+2}}(2^{-j}q)$. Легко видеть, что подпространства $S_{q',j}$ инвариантны относительно операторов $K_{q,q'}$, и сужение $K_{q,q'}$ на ортогональное дополнение к $S_{q',j}$ равно нулю. При $|q-q'|\geqslant 8$ пространства $S_{q,j}$ и $S_{q',j}$ ортогональны. Ясно, что множество всех q можно разбить на 8^{d-1} подмножеств так, что если q_1,q_2 принадлежат одному подмножеству и не совпадают, то $S_{q_1,j}\perp S_{q_2,j}$. Если Q — одно из таких подмножеств, то операторы $\sum_{q\in\mathbb{Z}^{d-1}}K_{q,q'}$ при различных $q'\in Q$ действуют во взаимно ортогональных пространствах. Следовательно,

$$\left\|\sum_{q\in\mathbb{Z}^d,q'\in Q}K_{q,q'}\right\|_{L_2\to L_2}=\sup_{q'\in Q}\left\|\sum_{q\in\mathbb{Z}^{d-1}}K_{q,q'}\right\|_{L_2\to L_2}.$$

Разбивая множество значений q' на 8^{d-1} подмножеств, получаем

$$\begin{aligned}\|K_j\|_{L_2(\mathbb{R}^{d-1})\to L_2(\mathbb{R}^{d-1})} &= \Big\|\sum_{q,q'} K_{q,q'}\Big\|_{L_2\to L_2} \\ &\leqslant 8^{d-1}\sup_{q'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\Big\|\sum_{q\in\mathbb{Z}^{d-1}} K_{q,q'}\Big\|_{L_2\to L_2} \leqslant C(d)\sup_{q,q'\in\mathbb{Z}^{d-1}}\|K_{q,q'}\|_{L_2\to L_2}, \qquad (2.3.14)\end{aligned}$$

так как внутри суммы по q число ненулевых слагаемых конечно. Нам остается оценить правую часть (2.3.14). Сделаем замену переменной. Пусть $Z = 2^j z - q$, $Z' = 2^j z' - q$. Тогда последний супремум будет равен

$$\sup_{q,q'}\|\widetilde{K}_{q,q'}\|_{L_2(\mathbb{R}^{d-1})\to L_2(\mathbb{R}^{d-1})},$$

где $\widetilde{K}_{q,q'}$ — интегральный оператор в $\mathbb{R}^{d-1}$ с ядром

$$\widetilde{K}_{q,q'}(Z,Z') = \lambda^{-(d-1)}\left(\frac{\lambda}{2^j}\right)^{\frac{d-1}{2}-k} e^{i\frac{\lambda}{2^j}d_{j,q}(Z,Z')}\mu(Z-Z')h(Z,Z',q,q',j), \qquad (2.3.15)$$

где

$$d_{j,q}(Z,Z') = 2^j|x(2^{-j}(Z+q)) - x(2^{-j}(Z'+q))|, \qquad (2.3.16)$$

$$h(Z,Z',q,q',j) = \frac{\eta(Z)\eta(Z'+q-q')}{d_{j,q}(Z,Z')^{\frac{d-1}{2}+k}} b(2^{-j}(Z+q), 2^{-j}(Z'+q)).$$

Носитель функции $\mu(Z-Z')h(Z,Z',q,q',j)$ по переменным Z, Z' содержится в шаре $B_4^{d-1}(0)$. Как функция этих переменных, она равномерно ограничена в $C^d(B_4^{d-1}(0)\times B_4^{d-1}(0))$, так как поверхность Σ и функция x принадлежат классу C^d.

6. Завершение доказательства оценки (2.3.12). Изучим более детально функцию (2.3.16). На носителе h выполняется

$$(2^{-j}(Z+q), 2^{-j}(Z'+q)) \in B^{d-1}_{\varepsilon'/2}(0)\times B^{d-1}_{\varepsilon'/2}(0).$$

В этой области $\frac{\partial x_i}{\partial z_j} = \delta_{ij} + O(\varepsilon')$. Зафиксируем некоторые Z_0, Z_0'; пусть $W = Z - Z_0$, $W' = Z' - Z_0'$, и пусть W_1, W_1' — координаты вдоль направления $Z_0 - Z_0'$. Пусть также $w_l = 2^{-j}W_l$, $w_l' = 2^{-j}W_l'$, $l = 1,\dots,d-1$. Пусть $v = 2^{-j}(Z_0+q)$, $v' = 2^{-j}(Z_0'+q)$. По построению

$$\frac{\partial x_i}{\partial w_j}(v) = \delta_{ij} + O(\varepsilon'), \quad \frac{\partial x_i}{\partial w_j'}(v') = \delta_{ij} + O(\varepsilon'). \qquad (2.3.17)$$

Кроме того, на носителе $\mu(Z-Z')$ верно $\frac{1}{2}+O(\varepsilon')\leqslant 2^j|x(v+w)-x(v+w')|\leqslant 2+O(\varepsilon')$. Имеем

$$\frac{\partial^2 d_{j,q}}{\partial W_l\,\partial W'_m}\bigg|_{w=w'=0}=\frac{1}{2^j|x(v)-x(v')|}\bigg\{-\sum_{l'=1}^{d-1}\frac{\partial x_{l'}}{\partial w'_m}(v')\frac{\partial x_{l'}}{\partial w_l}(v)\\+\sum_{l',m'=1}^{d-1}\frac{(x_{l'}(v)-x_{l'}(v'))(x_{m'}(v)-x_{m'}(v'))\frac{\partial x_{l'}}{\partial w_l}(v)\frac{\partial x_{m'}}{\partial w'_m}(v')}{|x(v)-x(v')|^2}\bigg\}.$$

В силу выбора системы координат при $l,m\geqslant 2$ выполняется

$$\frac{|x_l(v)-x_l(v')|}{|x(v)-x(v')|}=O(\varepsilon'),\quad \frac{|x_m(v)-x_m(v')|}{|x(v)-x(v')|}=O(\varepsilon').$$

Используя (2.3.17), получаем

$$\frac{\partial^2 d_{j,q}}{\partial W_l\,\partial W'_m}\bigg|_{W=W'=0}=\\=\frac{-\delta_{lm}}{2^j|x(2^{-j}(Z_0+q))-x(2^{-j}(Z'_0+q))|}+O(\varepsilon'),\\ l,m=2,\dots,d-1.\quad (2.3.18)$$

Заметим, что на носителе μ знаменатель принадлежит интервалу $[\frac{1}{2}+O(\varepsilon');2+O(\varepsilon')]$.

С помощью разбиения единицы можно свести оценку интегрального оператора с ядром (2.3.15) к случаю, когда носитель h по Z,Z' имеет вид $B^{d-1}_{\varepsilon'}(Z_0)\times B^{d-1}_{\varepsilon'}(Z'_0)$; это разбиение единицы будет зависеть только от ε'. Выберем на этом множестве координаты W,W', определенные выше. Ясно, что оценка (2.3.18) сохраняется при $|W|,|W'|=O(\varepsilon')$, причем можно выбрать ε', зависящее только от Σ, так, чтобы гессиан был отделен от нуля во всех рассматриваемых координатных окрестностях.

Таким образом, L_2-оценка оператора $\widetilde{K}_{q,q'}$ сводится к оценке конечного (зависящего только от ε' и Σ) числа интегральных операторов с ядрами вида

$$\lambda^{-(d-1)}\left(\frac{\lambda}{2^j}\right)^{\frac{d-1}{2}-k}e^{i\frac{\lambda}{2^j}\tilde{d}_{j,q}(W,W')}\mu(W-W'+Z_0-Z'_0)\tilde{h}(W,W',q,q',j),$$

где функция $\tilde{d}_{j,q}$ — это $d_{j,q}$, записанная в новых координатах W, W', а $\tilde{h}$ — это h, записанная в тех же координатах и домноженная на срезающие функции, обеспечивающие $\operatorname{supp}\tilde{h}_{W,W'}\subset B^{d-1}_{\varepsilon'}(0)\times B^{d-1}_{\varepsilon'}(0)$. С учетом (2.3.18), эти операторы удовлетворяют условиям следствия 2.2.7 с $m = d - 2$. Следовательно,

$$\|\widetilde{K}_{q,q'}\|_{L_2(\mathbb{R}^{d-1})\to L_2(\mathbb{R}^{d-1})} \leqslant C\lambda^{-(d-1)} \left(\frac{\lambda}{2^j}\right)^{\frac{d-1}{2}-k} \left(\frac{\lambda}{2^j}\right)^{-\frac{d-2}{2}} \sqrt{\ln\left(1+\frac{\lambda}{2^j}\right)}$$
$$\leqslant C\lambda^{-(d-1)} \left(\frac{\lambda}{2^j}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\ln\left(1+\frac{\lambda}{2^j}\right)},$$

так как $2^j \leqslant \lambda$. Используя (2.3.14), получаем (2.3.12), что завершает доказательство теоремы 2.3.1. ∎

Замечание 2.3.2. Теоремы 2.3.1 и 2.1.1 также верны при $d = 2$, $\Sigma \in C^1$.

2.4 Доказательство теоремы 2.1.1

Предложение 2.4.1. *Пусть функция* $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\chi(0) = 1$, *такова, что в условиях теоремы* 2.1.1 *выполняется*

$$\|(\chi(\sqrt{-\Delta}-\lambda)+\chi(\sqrt{-\Delta}+\lambda))g\|_{L_r(\Sigma)} \leqslant C\lambda^{\frac{d-1}{2}-\frac{d-1}{r}}\|g\|_{L_2(M)},$$
$$\forall g \in L_2(M),\ \lambda \geqslant 1. \quad (2.4.1)$$

Тогда выполняется и оценка (2.1.1) (*с другой константой, возможно, зависящей от* χ).

Доказательство. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|\chi(\lambda)| \geqslant \frac{1}{2}$ при $\lambda \in [-1/m; 1/m]$. Заметим, что $E_\lambda = E_{\sqrt{-\Delta}}[\lambda - 1; \lambda)$. Пусть

$$E_{\lambda,m} = E_{\sqrt{-\Delta}}[\lambda; \lambda + 1/m).$$

Мы покажем, что из (2.4.1) следует

$$\|E_{\lambda,m}f\|_{L_r(\Sigma)} \leqslant C\lambda^{\frac{d-1}{2}-\frac{d-1}{r}}\|f\|_{L_2(M)}, \quad \forall f \in L_2(M), \forall \lambda \geqslant 1. \qquad (2.4.2)$$

Оценка (2.1.1) при $\lambda \geqslant 2$ получается суммированием оценок (2.4.2) по отрезкам $[\lambda-1+k/m; \lambda-1+(k+1)/m)$. При $1 \leqslant \lambda < 2$ она следует из эквивалентности любых двух норм в конечномерном пространстве $\operatorname{Ran} E_\lambda$. Достаточно доказывать неравенство (2.4.2) только для $f = E_{\lambda,m}f$.

Выберем λ_0 таким, чтобы $|\chi(\lambda)| \leqslant \frac{1}{4}$ при $|\lambda| \geqslant \lambda_0$. Для $\lambda < \lambda_0 + 1/m$ оценка (2.4.2) также следует из эквивалентности норм в конечномерном пространстве. Пусть $\lambda \geqslant \lambda_0 + 1/m$. Тогда

$$|\chi(t-\lambda)+\chi(t+\lambda)| \geqslant \frac{1}{4} \quad \text{при } \lambda \leqslant t < \lambda + 1/m.$$

Таким образом, сужение оператора $\chi(\sqrt{-\Delta}-\lambda)+\chi(\sqrt{-\Delta}+\lambda)$ на $\operatorname{Ran} E_{\lambda,m}$ является ограниченно обратимым по L_2-норме, причем

$$\left\| \left(\left(\chi(\sqrt{-\Delta}-\lambda)+\chi(\sqrt{-\Delta}+\lambda) \right) \Big|_{\operatorname{Ran} E_{\lambda,m}} \right)^{-1} \right\| \leqslant 4.$$

Следовательно, для любого $f \in \operatorname{Ran} E_{\lambda,m}$ существует такое g, что

$$f = E_{\lambda,m} f = (\chi(\sqrt{-\Delta}-\lambda)+\chi(\sqrt{-\Delta}+\lambda))g,$$

$$\|g\|_{L_2(M)} \leqslant 4\|f\|_{L_2(M)}.$$

Воспользовавшись (2.4.1), получаем

$$\begin{aligned}\|E_{\lambda,m} f\|_{L_r(\Sigma)} &= \|(\chi(\sqrt{-\Delta}-\lambda)+\chi(\sqrt{-\Delta}+\lambda))g\|_{L_r(\Sigma)} \\ &\leqslant C\lambda^{\frac{d-1}{2}-\frac{d-1}{r}}\|g\|_{L_2(M)} \leqslant 4C\lambda^{\frac{d-1}{2}-\frac{d-1}{r}}\|f\|_{L_2(M)}. \blacksquare\end{aligned}$$

Следующее утверждение является стандартным.

Предложение 2.4.2. *Пусть M — гладкое риманово многообразие без края, $g \in C^\infty(M)$. Тогда задача Коши*

$$\partial_t^2 h(t,x) = \Delta h(t,x), \quad h(0,x) = g(x), \quad \partial_t h(0,x) = 0 \tag{2.4.3}$$

имеет единственное классическое решение $h \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times M)$. В случае $M = \mathbb{R}^d$ имеем $h(t,x) = 0$ при $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} g) \geqslant t$.

Дадим точное определение многообразия $\mathbb{T}^d$. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка,

$$\Gamma = \{l_1 b_1 + \ldots + l_m b_m, \quad l_j \in \mathbb{Z}\},$$

где $b_1, \ldots, b_m$ — фиксированный (не обязательно ортонормированный) базис в $\mathbb{R}^m$. Пусть

$$\Omega = \{y_1 b_1 + \ldots + y_m b_m, \quad 0 \leqslant y_i < 1\}$$

— элементарная ячейка решетки Γ. Ее мы и будем отождествлять с тором. Оператор Лапласа-Бельтрами является сужением обычного оператора Лапласа на $\mathbb{R}^d$ с периодическими краевыми условиями.

Будем называть стандартной координатной окрестностью гомеоморфный изометрический образ некоторой области $U \subset \mathbb{R}^d$ со стандартной евклидовой метрикой под действием проекции $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d/\Gamma$. Изометричность означает, что геодезическое расстояние по отношению к метрике тора такое же, как и в прообразе (то есть области в $\mathbb{R}^d$). Таким свойством обладает, например, выпуклая область достаточно малого диаметра. На таких координатных окрестностях введем систему координат, пришедшую из $\mathbb{R}^d$. Ясно, что в этих координатах оператор Лапласа записывается как стандартный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$.

Через $B_\tau(X)$ будем обозначать открытую τ-окрестность множества X. Если $X = \{x_0\}$, то по определению $B_\tau(x_0) = B_\tau(\{x_0\})$.

Лемма 2.4.3. *Пусть $V \subset \mathbb{T}^d$ — стандартная координатная окрестность, соответствующая области $U \subset \mathbb{R}^d$. Пусть $g \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, и пусть* $\operatorname{supp} g \subset V$, $B_\tau(\operatorname{supp} g) \subset V$. *Пусть $-\Delta$ — оператор Лапласа-Бельтрами на $\mathbb{T}^d$. Тогда в стандартных координатах на V*

$$(\cos(\tau\sqrt{-\Delta})g)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\xi \int\limits_{\mathbb{R}^d} \cos(\tau|\xi|) e^{i(x-y)\xi} g(y)\, dy.$$

Доказательство. Правая часть является (единственным классическим) решением задачи Коши (2.4.3) для волнового уравнения в $\mathbb{R}^d$, что легко проверяется с помощью преобразования Фурье. Согласно предложению 2.4.2, его носитель при всех $t \in [0; \tau]$ содержится в U. Поскольку волновое уравнение на торе в локальных координатах записывается так же, как и волновое уравнение в $\mathbb{R}^d$, данное решение, перенесенное с помощью карты на M и продолженное нулем за пределы координатной окрестности, будет решением задачи Коши (2.4.3) на $M = \mathbb{T}^d$. Функция $\cos(\tau\sqrt{-\Delta})g$ является решением той же самой задачи Коши. Следовательно, левая часть совпадает с правой. ∎

Предложение 2.4.4. *Пусть $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,* $\operatorname{supp} \hat{\chi} \subset [\varepsilon; 2\varepsilon] \cup [-2\varepsilon; -\varepsilon]$ *для некоторого $\varepsilon > 0$, $\hat{\chi}(t) = \hat{\chi}(-t)$ и $\chi(0) = 1$. Пусть U — стандартная окрестность, g — гладкая функция на $\mathbb{T}^d$,* $\operatorname{supp} g \subset U$, $B_{2\varepsilon}(\operatorname{supp} g) \subset U$. *Тогда в стандартных координатах*

$$((\chi(\sqrt{-\Delta} - \lambda) + \chi(\sqrt{-\Delta} + \lambda))g)(x) = \int\limits_U R(x - y, \lambda) g(y)\, dy,$$

где

$$R(x - y, \lambda) = 4(2\pi)^{-(d+1/2)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\xi \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \cos(\tau|\xi|) \cos(\tau\lambda) e^{i(x-y)\xi} \hat{\chi}(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство. Имеем

$$((\chi(\sqrt{-\Delta}-\lambda)+\chi(\sqrt{-\Delta}+\lambda))g)(x) =$$
$$= 2(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\hat{\chi}(\tau)((\cos(\tau(\sqrt{-\Delta}-\lambda))+\cos(\tau(\sqrt{-\Delta}+\lambda)))g)(x)\,d\tau =$$
$$= 4(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\hat{\chi}(\tau)(\cos(\tau\sqrt{-\Delta})\cos(\tau\lambda)g)(x)\,d\tau, \quad (2.4.4)$$

затем применяем лемму 2.4.3 при $\tau \leqslant 2\varepsilon$. ∎

Следствие 2.4.5. *Пусть* $g \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, $\operatorname{dist}(x, \operatorname{supp} g) \geqslant 2\varepsilon$. *Тогда*

$$((\chi(\sqrt{-\Delta}-\lambda)+\chi(\sqrt{-\Delta}+\lambda))g)(x) = 0. \quad (2.4.5)$$

Доказательство. Пусть α_i — разбиение единицы на M, такое что 2ε-окрестность $\operatorname{supp}\alpha_i$ является стандартной координатной окрестностью. Тогда в силу (2.4.4)

$$((\chi(\sqrt{-\Delta}-\lambda)+\chi(\sqrt{-\Delta}+\lambda))\alpha_i g)(x) =$$
$$= 4(2\pi)^{-1/2}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\hat{\chi}(\tau)(\cos(\tau\sqrt{-\Delta})\cos(\tau\lambda)\alpha_i g\,d\tau\right)(x).$$

Но из предложения 2.4.2 вытекает $(\cos(\tau\sqrt{-\Delta})\alpha_i g)(x) = 0$ при $\tau \leqslant 2\varepsilon$. ∎

Следствие 2.4.6. *В условиях предложения* 2.4.4

$$R(x-y,\lambda) = 0 \quad \text{при } |x-y| \geqslant 2\varepsilon.$$

Доказательство. Предположим обратное. Поскольку R — гладкая вещественная функция, это означало бы, что $R(x,\lambda)$ отлично от нуля и имеет постоянный знак при $|x-x_0| < \varepsilon'$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и $\varepsilon' > 0$, таких что $|x_0| > 2\varepsilon$, $|x_0| - \varepsilon' > 2\varepsilon$. Выбирая в качестве g неотрицательную функцию, такую что $\operatorname{supp} g \subset B_{\varepsilon'}(0)$, мы приходим к противоречию со следствием 2.4.5. ∎

Сделаем замену переменной $\xi = \lambda\eta$. Тогда

$$R(x-y,\lambda) = (2\pi)^{-(d+1/2)}\big\{(R_{++}(x-y,\lambda)+R_{+-}(x-y,\lambda) + R_{-+}(x-y,\lambda)+R_{--}(x-y,\lambda)\big\}, \quad (2.4.6)$$

где

$$R_{\pm\pm}(x-y,\lambda)=\lambda^d\int\limits_{\mathbb{R}^d}d\eta\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\hat{\chi}(\tau)e^{i\lambda\{\pm\tau(|\eta|\pm1)+\eta(x-y)\}}\,d\tau$$

(индексы в левой части — соответственно первый и второй знаки в показателе экспоненты). Перепишем последнюю формулу в виде

$$R_{\pm\pm}(x-y,\lambda)=\lambda^d\int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}}\hat{\chi}_0(\tau)e^{i\lambda\{\pm\tau(|\eta|\pm1)+\eta(x-y)\}}\,d\tau\,d\eta,$$

где $\hat{\chi}_0$ совпадает с $\hat{\chi}$ на $[\varepsilon;2\varepsilon]$ и продолжено нулем за пределы этого интервала.

Замечание 2.4.7. Аналоги леммы 2.4.3 и предложения 2.4.4, разумеется, справедливы и в случае $M\neq\mathbb{T}^d$. Однако явные выражения для ядер устроены сложнее и включают поправочный член, убывающий быстрее любой степени λ. В случае $M=\mathbb{T}^d$, в отличие от общего случая, удается обойтись без техники интегральных операторов Фурье. Подробнее об общем случае см. [37].

Пусть $\gamma_\varepsilon(x)$ — характеристическая функция шара $B^d_\varepsilon(0)$.

Теорема 2.4.8. *Пусть Σ — C^d-гладкая компактная гиперповерхность в $\mathbb{R}^d$. Существует такое $\varepsilon>0$, что для любой χ, удовлетворяющей условиям предложения* 2.4.4*,*

$$\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\gamma_{2\varepsilon}(x-y)R_{\pm\pm}(x-y,\lambda)g(y)\,dy\right\|_{L_r(\Sigma)}\leqslant$$

$$\leqslant C(\chi)\lambda^{\frac{d-1}{2}-\frac{d-1}{r}}\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad\forall g\in L_2(\mathbb{R}^d),\quad r>\frac{2d}{d-1},\quad\lambda\geqslant1.$$

Покажем, что теорема 2.1.1 следует из теоремы 2.4.8. Действительно, пусть $\alpha_i\in C^\infty(M)$ — конечный набор функций, такой что $\sum_i\alpha_i(x)=1$ при $x\in\Sigma$ и носитель каждой из них содержится в ε-окрестности некоторой точки $x_i\in\Sigma$, причем 6ε-окрестность точки x_i является стандартной координатной окрестностью. Для любой функции $f\in C^\infty(M)$ мы имеем

$$\|f\|_{L_r(\Sigma)}=\left\|\sum_i\alpha_if\right\|_{L_r(\Sigma)}\leqslant\sum_i\|\alpha_if\|_{L_r(\Sigma)}$$

Поэтому оценку (2.4.1) достаточно доказывать для операторов вида

$$\alpha_i\left\{\chi(\sqrt{-\Delta}-\lambda)+\chi(\sqrt{-\Delta}+\lambda)\right\}.$$

Теперь пусть $\beta_i \in C^\infty(M)$, $\beta_i(x) = 1$ при $\operatorname{dist}(x, x_i) \leqslant 3\varepsilon$, $\beta_i(x) = 0$ при $\operatorname{dist}(x, x_i) \geqslant 4\varepsilon$. Используя следствие 2.4.5, получаем

$$\alpha_i \left\{ \chi(\sqrt{-\Delta} - \lambda) + \chi(\sqrt{-\Delta} + \lambda) \right\} = \alpha_i \left\{ (\chi(\sqrt{-\Delta} - \lambda) + \chi(\sqrt{-\Delta} + \lambda) \right\} \beta_i. \tag{2.4.7}$$

В силу следствия 2.4.6, в правой части формулы (2.4.6) можно заменить $R_{\pm,\pm}(x-y,\lambda)$ на $\gamma_{2\varepsilon}(x-y)R_{\pm,\pm}(x-y,\lambda)$. Таким образом, оценка правой части (2.4.7) сводится к теореме 2.4.8.

Доказательство теоремы 2.4.8. Рассмотрим вначале ядра $R_{\pm,+}$. Интегрирование по частям дает для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\chi}_0(\tau) e^{\pm i\lambda\tau(|\eta|+1)}\, d\tau \right| \leqslant C_N (\lambda(1+|\eta|))^{-N},$$

откуда $|R_{\pm,+}(x-y,\lambda)| \leqslant C'_N \lambda^{-N}$ равномерно по x, y.

Теперь пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0 \leqslant \varphi(\eta) \leqslant 1\ \forall \eta$, $\varphi(\eta) = 1$ при $\frac{1}{2} \leqslant |\eta| \leqslant 2$, $\varphi(\eta) = 0$ при $|\eta| \leqslant \frac{1}{4}$ или $|\eta| \geqslant 3$. Положим

$$R'_{\pm,-}(x-y,\lambda) = \lambda^d \int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}} \hat{\chi}_0(\tau)\varphi(\eta) e^{i\lambda\{\pm\tau(|\eta|-1)+\eta(x-y)\}}\, d\tau\, d\eta, \tag{2.4.8}$$

$$R''_{\pm,-}(x-y,\lambda) = R_{\pm,-}(x-y,\lambda) - R'_{\pm,-}(x-y,\lambda).$$

Аналогично предыдущему, для любого натурального N

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{\chi}_0(\tau) e^{\pm i\lambda\tau(|\eta|-1)} (1-\varphi(\eta))\, d\tau \right| \leqslant C_N (\lambda(1+|\eta|))^{-N},$$

откуда

$$|R''_{\pm,-}(x-y,\lambda)| = \lambda^d \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{d+1}} \hat{\chi}_0(\tau) e^{i\lambda\{\pm\tau(|\eta|-1)+\eta(x-y)\}} (1-\varphi(\eta))\, d\tau\, d\eta \right| \leqslant C'_N \lambda^{d-N}.$$

Следовательно, операторы с ядрами $\gamma_{2\varepsilon}(x-y)R_{\pm+}(x-y,\lambda)$ и $\gamma_{2\varepsilon}(x-y)R''_{\pm-}(x-y,\lambda)$ для любого N действуют из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ с нормами, ограниченными $C_N\lambda^{-N}$ и, следовательно, для них справедливо утверждение теоремы.

Основную техническую часть составляет оценка ядра $R'_{\pm,-}(x-y,\lambda)$. Мы построим его асимптотическое разложение с помощью теоремы 2.2.2. Фазовая функция в данном случае равна

$$f(\tau,\eta) = \pm\tau(|\eta|-1) + \eta(x-y).$$

Предположим, что $|x-y| \geqslant \varepsilon/2$. Точкой стационарной фазы будет $\tau_0 = |x-y|$, $\eta_0 = \mp\frac{x-y}{|x-y|}$ (есть еще точка с отрицательным τ, но она не дает вклада, поскольку в ее окрестности $\hat{\chi}_0(\tau) = 0$). Стационарная фаза в этой точке равна $f(\tau_0, \eta_0) = \mp|x-y|$. Заметим, что $(\tau_0, \eta_0) \subset [\varepsilon; 2\varepsilon] \times \operatorname{supp}\varphi$, и фаза является гладкой в окрестности этого множества. Вычислим определитель матрицы вторых производных. Он совпадает с определителем матрицы вторых производных функции $\pm\tau|\eta|$ (так как последняя отличается от фазы линейными слагаемыми). Нас интересует его значение в точке $\tau_0 = |x-y|$, $\eta_0 = \mp\frac{x-y}{|x-y|}$. Фазовая функция сферически симметрична по переменной η. Поэтому определитель достаточно вычислить при $\eta = (1, 0, \dots, 0)$. Матрица вторых производных в этой точке имеет вид

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_0 I \end{pmatrix},$$

где I — $(d-1)\times(d-1)$-единичная матрица. Ее определитель равен $-(\pm 1)^{d+1}|x-y|^{d-1}$ и ограничен снизу по модулю в силу предположения $|x-y| \geqslant \varepsilon/2$. Таким образом, интеграл (2.4.8) при $|x-y| \geqslant \varepsilon/2$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2.2 с $u = \hat{\chi}_0(\tau)\varphi(\eta)$, $\omega = \lambda$. Получаем асимптотическое разложение

$$R'_{\pm,-}(x-y,\lambda) = \lambda^{\frac{d-1}{2}} e^{\mp i\lambda|x-y|} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^{-k} R_k(x-y) + \lambda^{-N+\frac{d-1}{2}} \widetilde{R}_N(x-y,\lambda), \tag{2.4.9}$$

где $R_k(x-y)$ — некоторые дифференциальные выражения от $\hat{\chi}$ в точке $|x-y|$ и фазовой функции с коэффициентами, зависящими от $|x-y|$, а остаток $\widetilde{R}_N(x-y,\lambda)$ равномерно ограничен по λ, если x, y принадлежат компактному множеству. При этом $R_k(x-y) = 0$ при $|x-y| \notin [\varepsilon; 2\varepsilon]$, так как $\operatorname{supp}\hat{\chi}(\tau) = [\varepsilon; 2\varepsilon]$, и соответствующее дифференциальное выражение от $\hat{\chi}$ вне этого отрезка равно нулю.

Пусть теперь $|x-y| \leqslant \varepsilon/2$. Заметим, что на носителе $\hat{\chi}_0(\tau)$

$$|\nabla_\eta \{\pm\tau(|\eta|-1) + \eta(x-y)\}| = \left|\pm\tau\frac{\eta}{|\eta|} + (x-y)\right| \geqslant \tau - |x-y| \geqslant \varepsilon/2.$$

По теореме 2.2.1 для любого натурального N

$$\left|R'_{\pm,-}(x-y,\lambda)\right| \leqslant C_N\lambda^{-N} \quad \text{при} \quad |x-y| \leqslant \varepsilon/2.$$

Таким образом, асимптотическое разложение (2.4.9) верно и при $|x-y| \leqslant \varepsilon/2$; в этом случае остается только последнее слагаемое.

Аналогично случаю ядер $R_{\pm+}$, $R''_{\pm-}$ (учитывая множитель $\gamma_{2\varepsilon}(x-y)$ в формулировке теоремы) получается оценка остаточного члена асимптотики (2.4.9). Среди первых членов разложения, очевидно, достаточно ограничиться случаем $k=0$; оценка остальных производится точно так же, но дает лучшую степень λ. Таким образом, теорему 2.4.8 достаточно доказывать для ядра вида

$$\lambda^{\frac{d-1}{2}} e^{\pm i\lambda|x-y|} R_k(x-y).$$

Доказательство завершается применением теоремы 2.3.1. ■

Глава 3

Случаи всего пространства, слоя и прямоугольного цилиндра

3.1 Формулировка результата

В данной главе мы рассматриваем частный случай оператора H из главы 1. Он будет задан квадратичной формой

$$h[u,v] = \int\limits_{\Xi} \langle \nabla u(x,y), \nabla v(x,y)\rangle \, dx\, dy + \int\limits_{\Xi} \langle V(x,y)u(x,y), v(x,y)\rangle \, dx\, dy + \\ + \int\limits_{\Sigma} \langle \sigma(x,y)u(x,y), v(x,y)\rangle \, dS(x,y) \quad (3.1.1)$$

в $L_2(\Xi;\mathbb{C}^N) = L_2(U\times\mathbb{R}^m;\mathbb{C}^N)$, где $U = [0;a_1]\times\ldots\times[0;a_k]\subset\mathbb{R}^k$, $a_i>0$, — параллелепипед в $\mathbb{R}^k$, $k\geqslant 0$, $d=k+m\geqslant 3$. При $k=0$ область Ξ — это всё пространство, а при $k=1$ — плоско-параллельный слой.

Нам понадобится общий вариант краевых условий: на разных парах противоположных граней $\partial U\times\mathbb{R}^m$ некоторые компоненты функции будут удовлетворять краевому условию Дирихле, а некоторые — условию Неймана. Таким образом, областью определения формы (3.1.1) будет пространство

$$\operatorname{Dom} h = L_2(\mathbb{R}^m; \operatorname{Dom} a)\cap L_2(U; H^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}^N)),$$

$$\operatorname{Dom} a = H^1_{\mathcal{C}}(U;\mathbb{C}^N) = \{u\in H^1(U;\mathbb{C}^N)\colon \\ u_i(x)|_{x_j=0} = u_i(x)|_{x_j=a_j} = 0 \text{ при } (i,j)\in\mathcal{C}\}, \quad (3.1.2)$$

где $\mathcal{C} \subset \{1, \ldots, N\} \times \{1, \ldots, k\}$ — некоторый фиксированный набор пар индексов, определяющий, на каких гранях и для каких компонент функции заданы условия Дирихле. Отметим, что форма a в данном случае отвечает обычному оператору Лапласа.

Теорема 3.1.1. *Пусть $d = k + m \geqslant 3$, $m \geqslant 1$. Пусть $\Sigma \subset \Xi = U \times \mathbb{R}^m$ — Γ-периодическая система C^d-гиперповерхностей в смысле определения 1.2.1. Пусть $\sigma \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Sigma; M_N(\mathbb{C}))$, $p > d - 1$, и $V \in L_{d/2,\mathrm{loc}}(\Xi; M_N(\mathbb{C}))$ — Γ-периодические функции. Тогда у соответствующего оператора H в $L_2(\Xi)$ нет собственных значений. Если $H = H^*$, то его спектр абсолютно непрерывен.*

При $\sigma = 0$ соответствующий результат для электрического потенциала V с оптимальным показателем $d/2$ известен [30]. Доказательство соответствующего условия $A(q)$ дано в [11]. Для полноты изложения мы приводим его в разделе 3.3 (для цилиндра с периодическими краевыми условиями).

В случае ненулевого сингулярного потенциала теорема является новой. Подчеркнем, что на гиперповерхность Σ не накладывается никаких геометрических условий. В старших размерностях таких результатов известно не было. Соответствующее условие $B(q)$ мы докажем в разделе 3.2 (для цилиндра с периодическими краевыми условиями). Доказательство основано на применении теоремы 2.1.1. Отметим также, что при $d \geqslant 3$ оптимальным показателем для σ в шкале L_p является $p = d - 1$. Таким образом, условие $p > d - 1$ близко к оптимальному. В разделе 3.4 мы выведем теорему 3.1.1 из результатов, полученных для цилиндров с периодическими краевыми условиями.

Замечание 3.1.2. Теорема 3.1.1 в частном случае $k = 2$, $m = 1$, $N = 6$, $\Sigma = \partial\Xi$ гарантирует отсутствие собственных значений у матричного оператора Шрёдингера в трехмерном прямоугольном цилиндре с третьим краевым условием. Отсюда, в свою очередь, вытекает абсолютная непрерывность спектра оператора Максвелла с периодическими коэффициентами в прямоугольном цилиндре (см. Введение).

3.2 Оператор с периодическими краевыми условиями

Пусть $\widehat{U} = (-a_1; a_1] \times (-a_2; a_2] \times \ldots \times (-a_k; a_k]$. В $L_2(\widehat{U} \times \Omega)$ введем вспомогательный оператор $\widehat{H}_0(\tau)$, заданный квадратичной формой

$$\hat{h}(\tau)[v,v] =$$
$$= \int\limits_{\widehat{U}\times\Omega} \langle (\nabla_y + i((\pi + i\tau)b_1 + \xi'))v(x,y), (\nabla_y + i((\pi - i\tau)b_1 + \xi'))v(x,y)\rangle \, dx\, dy$$
$$+ \int\limits_{\widehat{U}\times\Omega} \langle \nabla_x v(x,y), \nabla_x v(x,y)\rangle \, dx\, dy \quad (3.2.1)$$

на области определения $H^1_{\mathrm{per}}(\widehat{U}\times\Omega)$ (с периодическими краевыми условиями по всем переменным). Напомним, что b_1 — базисный вектор решетки Γ (1.2.1), $|b_1| = 1$, и $\xi = (\pi + i\tau)b_1 + \xi'$, $\xi' \perp b_1$. Собственными значениями оператора $\widehat{H}_0(\tau)$ будут

$$\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau) = |n + \pi b_1 + \xi'|^2 - \tau^2 + |\hat{n}|^2 + 2i\tau\langle n + \pi b_1, b_1\rangle, \quad \hat{n} \in \widehat{\Gamma}', \quad n \in \widetilde{\Gamma},$$

а собственные функции имеют вид $|\Omega|^{-1/2}|\widehat{U}|^{-1/2}e^{i(\hat{n}x+ny)}$, где

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} n_i\tilde{b}_i,\ n_i \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \langle \tilde{b}_i, b_j\rangle = 2\pi\delta_{ij},$$

— двойственная к Γ решетка, а

$$\widehat{\Gamma}' = \left\{ \hat{n} = \left(\frac{\pi m_1}{a_1}, ..., \frac{\pi m_k}{a_k} \right), m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

— решетка, двойственная к решетке $\widehat{\Gamma} \subset \mathbb{R}^k$ с элементарной ячейкой $\widehat{U}$. При $\tau > 0$ оператор $\widehat{H}_0(\tau)$ обратим и $\|\widehat{H}_0(\tau)^{-1}\| \leqslant (2\pi\tau)^{-1}$, поскольку

$$|\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau)| \geqslant 2\tau|\langle n + \pi b_1, b_1\rangle| = 2\pi\tau|2n_1 + 1| \geqslant 2\pi\tau, \quad (3.2.2)$$

так как $n_1 \in \mathbb{Z}$.

Из определения Σ следует, что $\Sigma \cap (U\times\Omega) = \widehat{\Sigma}\cap(U\times\Omega)$ для некоторого $\widehat{\Sigma} \subset (\widehat{U} \times \Omega)$, где $\widehat{\Sigma}$, рассматриваемое как подмножество тора $(\mathbb{R}^k/\widehat{\Gamma}) \times (\mathbb{R}^m/\Gamma)$, является конечным объединением C^d-гладких $(d-1)$-мерных подмногообразий.

Лемма 3.2.1. *Пусть* $0 < \delta < 1/2$, $b \geqslant 1$, *пусть* $|m_\mu| \leqslant b$ $\forall \mu \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|(\mu+m_\mu)^2-\tau^2|+\tau} \leqslant C(b,\delta)\tau^{-\delta} \tag{3.2.3}$$

при $\tau > 1$.

Доказательство. Ясно, что оценка верна для любого фиксированного конечного числа слагаемых. Поэтому достаточно оценивать сумму только по $\mu \geqslant 2b$. Заметим, что

$$\sum_{\mu \in [\tau-b-1;\tau+b]} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|(\mu+m_\mu)^2-\tau^2|+\tau} \leqslant (2b+2)\frac{(\tau+b)^{1-2\delta}}{\tau} \leqslant C(b)\tau^{-2\delta}, \quad \tau > 1,$$

так что далее можно ограничиться $\mu \notin [\tau-b-1;\tau+b]$. В этом случае можно заменить m_μ на целые числа (возможно, увеличив b на 1) так, чтобы все слагаемые разве лишь увеличились. Таким образом, достаточно предполагать $m_\mu \in \mathbb{Z} \cap [-b;b]$. Последнее множество конечно и не зависит от μ. Разбив сумму на несколько, можно свести оценку к случаю $m_\mu = \mathrm{const}$. Наконец, в сумме с фиксированным m_μ заменим переменную суммирования на $\mu + m_\mu$. С точностью до множителя, зависящего только от b, оценка такой суммы сведется к оценке

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|\mu^2-\tau^2|+\tau}.$$

Заметим, что

$$\sum_{\mu^2 \geqslant 2\tau^2} \frac{\mu^{1-2\delta}}{\mu^2-\tau^2+\tau} \leqslant 2 \sum_{\mu^2 \geqslant 2\tau^2} \mu^{-1-2\delta} \leqslant C(\delta)\tau^{-2\delta}.$$

Далее,

$$\sum_{\mu<2\tau} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|\mu^2-\tau^2|+\tau} \leqslant 2\tau^{1-2\delta} \sum_{\mu<2\tau} \frac{1}{|\mu^2-\tau^2|+\tau} \leqslant 2\tau^{-2\delta} \sum_{\mu<2\tau} \frac{1}{|\mu-\tau|+1}.$$

Ограниченность последней суммы следует из ограниченности интеграла

$$\tau^{-2\delta} \int_0^{2\tau} \frac{d\mu}{|\mu-\tau|+1} = 2\tau^{-2\delta} \int_\tau^{2\tau} \frac{d\mu}{\mu-\tau+1} = 2\tau^{-2\delta}\ln(\tau+1) \leqslant C(\delta)\tau^{-\delta}. \ \blacksquare$$

При $\tau \neq 0$ введем оператор $|\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}$ с теми же собственными функциями, что и $\widehat{H}_0(\tau)$, и собственными числами $|\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau)|^{-1/2}$.

Лемма 3.2.2. *При $\tau > 1$ и $u \in L_2(\widehat{U} \times \Omega)$*

$$\||\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}u\|^2_{L_q(\widehat{\Sigma})} \leqslant C(q,\tau)\|u\|^2_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)}, \quad 1 \leqslant q < \frac{2(d-1)}{d-2},$$

где $C(q,\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Доказательство. Заметим, что при фиксированном τ выполняется оценка $|\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau)| \geqslant C(|\hat{n}|^2 + |n|^2)$, откуда $|\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}u \in H^1(\widehat{U} \times \Omega)$, и L_q-след в левой части определен корректно.

Пусть E_μ — спектральный проектор оператора $-\Delta$ на многообразии $\widehat{U} \times \Omega$ (которое в силу периодических краевых условий отождествляется с d-мерным тором) на отрезок $[(\mu-1)^2; \mu^2)$. Ясно, что $\widehat{U} \times \mathbb{T}^m$ и $\widehat{\Sigma}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1.1. Поскольку $\mathrm{mes}_{d-1}(\widehat{\Sigma}) < +\infty$, из утверждения леммы 3.2.2 для некоторого q_0 следует утверждение для $1 \leqslant q \leqslant q_0$. Поэтому можно ограничиться случаем $\frac{2d}{d-1} < q < \frac{2(d-1)}{d-2}$ и применить неравенство

$$\|E_\mu u\|_{L_q(\widehat{\Sigma})} \leqslant C\mu^{\frac{d-1}{2}-\frac{d-1}{q}}\|u\|_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)}.$$

Заметим, что при рассматриваемых q оно выполняется с показателем $\frac{d-1}{2} - \frac{d-1}{q} = \frac{1}{2} - \delta$ для некоторого $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\left\||\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|_{L_q(\widehat{\Sigma})} &\leqslant \sum_{\mu=1}^{\infty}\left\|E_\mu|\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|_{L_q(\widehat{\Sigma})} \\ &\leqslant C\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{1/2-\delta}\left\|E_\mu|\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)} \\ &\leqslant C\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{1/2-\delta}\left\|E_\mu|\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}\right\| \cdot \|E_\mu u\|_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)},\end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $|\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}$ коммутирует с $-\Delta$. Далее, по неравенству Коши-Буняковского-Шварца,

$$\left\||\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|^2_{L_q(\widehat{\Sigma})} \leqslant C\|u\|^2_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)}\left(\sum_{\mu=1}^{[b]+1} + \sum_{\mu=[b]+2}^{+\infty}\right)\mu^{1-2\delta}\|E_\mu|\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}\|^2, \tag{3.2.4}$$

где $b = |\pi b_1 + \xi'|$. В силу (3.2.2), первую сумму можно оценить через $C(b)\tau^{-1}\|u\|^2_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)}$, и она удовлетворяет утверждению леммы. Оценим вторую сумму. Собственные значения оператора $-\Delta$ имеют вид $|\hat{n}|^2+|n|^2$, $\hat{n} \in \widehat{\Gamma}'$, $n \in \Gamma'$. Область значений проектора E_μ отвечает таким парам $(\hat{n}, n)$, что $(\mu-1)^2 \leqslant |\hat{n}|^2 + |n|^2 < \mu^2$. Отсюда

$$|n + \pi b_1 + \xi'|^2 + |\hat{n}|^2 \leqslant (|n| + b)^2 + |\hat{n}|^2 \leqslant \left(\sqrt{|n|^2 + |\hat{n}|^2} + b\right)^2 < (\mu + b)^2$$

и

$$|n + \pi b_1 + \xi'|^2 + |\hat{n}|^2 \geqslant (|n| - b)^2 + |\hat{n}|^2 \\ \geqslant \left(\sqrt{|n|^2 + |\hat{n}|^2} - b\right)^2 \geqslant (\mu - 1 - b)^2.$$

Следовательно, при $\mu \geqslant [b] + 2$

$$\left\| E_\mu |\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2} \right\|^2 = \max_{|\hat{n}|^2+|n|^2\in[(\mu-1)^2;\mu^2)} \frac{1}{|\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau)|} \\ \leqslant \max_{|n+\pi b_1+\xi'|^2+|\hat{n}|^2\in[(\mu-1-b)^2;(\mu+b)^2)} \frac{\sqrt{2}}{||n + \pi b_1 + \xi'|^2 + |\hat{n}|^2 - \tau^2| + \tau}.$$

Таким образом, вторая сумма в правой части (3.2.4) не превосходит

$$C\|u\|^2_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)} \times \\ \times \sum_{\mu=[b]+2}^{\infty} \max_{|n+\pi b_1+\xi'|^2+|\hat{n}|^2\in[(\mu-1-b)^2;(\mu+b)^2)} \frac{\mu^{1-2\delta}}{||n + \pi b_1 + \xi'|^2 + |\hat{n}|^2 - \tau^2| + \tau} \\ \leqslant C(b,\delta)\tau^{-\delta}\|u\|^2_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)} \to 0 \text{ при } \tau \to +\infty$$

по лемме 3.2.1. ∎

С точностью до обозначений следующее предложение доказано в [11, Theorem 1.2].

Предложение 3.2.3. *Существует такое $\tau_0 > 0$, что при $\tau > \tau_0$*

$$\|u\|_{L_{\frac{2d}{d-2}}(\widehat{U}\times\Omega)} \leqslant C\| |\widehat{H}_0(\tau)|^{1/2} u\|_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)}, \ \forall u \in H^1_{\mathrm{per}}(\widehat{U}\times\Omega). \qquad (3.2.5)$$

Для удобства читателя мы приводим доказательство в следующем параграфе.

Следствие 3.2.4. *Семейство операторов $\widehat{H}_0(\tau)$ удовлетворяет условиям $A(q_1)$ и $B(q_2)$ при $q_1 = \frac{2d}{d-2}$, $\frac{2d}{d-1} < q_2 < \frac{2(d-1)}{d-2}$.*

3.3 Доказательство предложения 3.2.3

Мы приводим доказательство из [11]. Оно несколько упрощается, поскольку нам нужен конечный результат для $V \in L_{d/2}(\widehat{U} \times \Omega)$, а не $V \in L^0_{d/2,\infty}(\widehat{U} \times \Omega)$.

Заметим, что достаточно доказывать утверждение в предположении $k = 0$, $m = d$, $\widehat{U} \times \Omega = \Omega$, поскольку добавление переменных из $\widehat{U}$ только уменьшает диапазон возможных значений квазиимпульса ξ. Поэтому можно рассматривать исходный оператор $H_0(\tau)$ при $k = 0$. Переменные из $\mathbb{R}^d$ мы будем обозначать через x, то есть

$$\Omega = \{x_1 b_1 + \ldots + x_d b_d,\ 0 \leqslant x_i < 1\}, \quad |b_1| = 1.$$

Пусть $S_r^{l-1} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{x \in \mathbb{R}^l \colon |x| = r\}$ — $(l-1)$-мерная сфера радиуса r, $S^{l-1} \stackrel{\text{def}}{=\!=} S_1^{l-1}$. Через dS мы обозначаем $(l-1)$-мерную меру Лебега на S_r^{l-1}, $\widehat{f}$ и $\check{f}$ — прямое и обратное преобразования Фурье функции f,

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-l/2} \int\limits_{\mathbb{R}^l} f(x) e^{-i\xi x}\, dx, \quad \check{f}(x) = (2\pi)^{-l/2} \int\limits_{\mathbb{R}^l} f(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi.$$

Следующий результат получен Стейном и Томасом, см., например, [48] и [38, Гл. VIII–IX].

Теорема 3.3.1. *Для* $l \geqslant 2$

$$\|f\|_{L_2(S^{l-1})} \leqslant C \|\widehat{f}\|_{L_{\frac{2l+2}{l+3}}(\mathbb{R}^l)}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l),\ \textit{где } \mathcal{S} \textit{ — класс Шварца.}$$

Постоянная C не зависит от f.

Используя замену переменной $x = ry$, легко получить оценку

$$\|f\|_{L_2(S_r^{l-1})} \leqslant C r^{\frac{l-1}{2l+2}} \|\widehat{f}\|_{L_{\frac{2l+2}{l+3}}(\mathbb{R}^l)}, \tag{3.3.1}$$

где постоянная C не зависит от f и r.

Для $a > 0$, $0 < a \leqslant \frac{3}{4}\tau$ пусть

$$B_{a,\tau} = \{x \in \mathbb{R}^l \colon \tau - a \leqslant |x| \leqslant \tau + a\}.$$

Лемма 3.3.2. *Пусть* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$, $\operatorname{supp} u \subset B_{a,\tau}$. *Тогда*

$$\|\check{u}\|_{L_{\frac{2l+2}{l-1}}(\mathbb{R}^l)} \leqslant C a^{1/2} \tau^{\frac{l-1}{2l+2}} \|u\|_{L_2(B_{a,\tau})}. \tag{3.3.2}$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^l)$. Тогда, в силу (3.3.1) и неравенства $\tau/4 \leqslant \tau - a < \tau + a \leqslant 7\tau/4$,

$$\|u\|^2_{L_2(B_{a,\tau})} \leqslant \int\limits_{\tau-a}^{\tau+a} \|u\|^2_{L_2(S_r^{l-1})}\,dr \leqslant 2Ca\tau^{\frac{l-1}{l+1}}\|\hat{u}\|^2_{L_{\frac{2l+2}{l+3}}(\mathbb{R}^l)}.$$

По двойственности отсюда следует (3.3.2). ∎

Для $a > 0$, $0 < a \leqslant \frac{3}{4}\tau$ пусть

$$M_{a,\tau} \stackrel{\text{def}}{=\!=} [-a;a]\times B_{a,\tau} = \{\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1} = \mathbb{R}^d\colon |\xi_1| \leqslant a,\ |\tau - |\xi'|| \leqslant a\}.$$

Лемма 3.3.3. *Пусть* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} u \subset M_{a,\tau}$. *Тогда*

$$\|\breve{u}\|_{L_{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant Ca^{1/2+1/d}\tau^{1/2-1/d}\|u\|_{L_2(M_{a,\tau})}. \tag{3.3.3}$$

Доказательство. Введем обозначение $x = (x_1, x') \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} = \mathbb{R}^d$, так что

$$\breve{u}(x_1, x') = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} u(\xi) e^{i(\xi_1 x_1 + \xi' x')}\,d\xi.$$

Пусть $q = \frac{2d}{d-2}$,

$$\widetilde{u}(x_1, \xi') \stackrel{\text{def}}{=\!=} (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} u(\xi) e^{i\xi_1 x_1}\,d\xi_1.$$

В силу леммы 3.3.2 с $l = d - 1$

$$\begin{aligned}
\|\breve{u}\|_{L_2(\mathbb{R};L_q(\mathbb{R}^{d-1}))} &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|\breve{u}(x_1,\cdot)\|^2_{L_q(\mathbb{R}^{d-1})}\,dx_1\right)^{1/2} \\
&\leqslant C\tau^{1/q}a^{1/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|\widetilde{u}(x_1,\cdot)\|^2_{L_2(B_{a,\tau})}\,dx_1\right)^{1/2} \\
&= C\tau^{1/q}a^{1/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|u(\xi_1,\cdot)\|^2_{L_2(B_{a,\tau})}\,d\xi_1\right)^{1/2} = C\tau^{1/q}a^{1/2}\|u\|_{L_2(M_{a,\tau})},
\end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{supp} u \subset M_{a,\tau}$. Аналогично

$$\begin{aligned}
\|\breve{u}\|_{L_\infty(\mathbb{R};L_q(\mathbb{R}^{d-1}))} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x_1\in\mathbb{R}} \|\breve{u}(x_1,\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^{d-1})} \\
&\leqslant C\tau^{1/q}a^{1/2} \operatorname*{ess\,sup}_{x_1\in\mathbb{R}} \|\widetilde{u}(x_1,\cdot)\|_{L_2(B_{a,\tau})} \\
&= C(2\pi)^{-1/2}\tau^{1/q}a^{1/2} \operatorname*{ess\,sup}_{x_1\in\mathbb{R}} \left\| \int_{-a}^{a} u(\xi_1,\cdot)e^{i\xi_1 x_1}\,d\xi_1 \right\|_{L_2(B_{a,\tau})} \\
&\leqslant C\pi^{-1/2}\tau^{1/q}a\|u\|_{L_2(\mathbb{R}\times B_{a,\tau})} = C\pi^{-1/2}\tau^{1/q}a\|u\|_{L_2(M_{a,\tau})}.
\end{aligned}$$

Доказательство завершается применением неравенства Гёльдера

$$\|\breve{u}\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\breve{u}\|^{2/q}_{L_2(\mathbb{R};L_q(\mathbb{R}^{d-1}))}\|\breve{u}\|^{1-2/q}_{L_\infty(\mathbb{R};L_q(\mathbb{R}^{d-1}))}. \blacksquare$$

Напомним, что мы доказываем оценку (3.2.5) для

$$H_0(\tau) = H_0((\pi + i\tau)b_1 + \xi'), \quad \xi' \perp b_1.$$

Пусть $\xi_0 = \pi b_1 + \xi'$. Мы можем предполагать, что $\xi' \in \mathbb{R}^d$ фиксировано. Пусть

$$K_{a,\tau} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{n \in \widetilde{\Gamma} \colon \xi_0 + n \in M_{a,\tau}\}.$$

Пусть

$$L_{a,\tau} = \{u \in L_2(\Omega) \colon u(x) = \sum_{n\in K_{a,\tau}} u_n e^{inx}\}.$$

Напомним, что

$$\widetilde{\Omega} = \{\xi_1\tilde{b}_1 + \ldots + \xi_d\tilde{b}_d,\ 0 \leqslant \xi_i < 1\}, \quad \langle b_i, \tilde{b}_j\rangle = 2\pi\delta_{ij},$$

— элементарная ячейка решетки $\widetilde{\Gamma}$, двойственной к Γ.

Лемма 3.3.4. *Пусть* $\frac{1}{2}\operatorname{diam}\widetilde{\Omega} \leqslant a \leqslant \tau/2$. *Тогда*

$$\|u\|_{L_{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leqslant Ca^{1/2+1/d}\tau^{1/2-1/d}\|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u \in L_{a,\tau}.$$

Доказательство. Пусть $n_0 = \frac{1}{2}(\tilde{b}_1 + \ldots + \tilde{b}_d)$ — центр ячейки $\widetilde{\Omega}$. Пусть $\widetilde{\Omega}_0 = \frac{1}{2}(\widetilde{\Omega} - n_0)$ — ячейка $\widetilde{\Omega}$, сдвинутая так, чтобы ее центр оказался в нуле, и сжатая в 2 раза. Выберем такую функцию $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, что

1. $\widehat{w}(\xi) \geqslant 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$.

2. $\operatorname{supp}\widehat{w} \subset \widetilde{\Omega}_0$.

3. $w(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$.

4. $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{w}(\xi)^2\, d\xi = 1$.

В качестве такой функции подойдет обратное преобразование Фурье от неотрицательной функции, сосредоточенной в достаточно малой окрестности нуля.

Пусть $u \in L_{a,\tau}$. Продолжим u с Ω на $\mathbb{R}^d$ периодическим образом относительно Γ. Тогда

$$\widehat{wu}(\xi) = \sum_{n \in K_{a,\tau}} u_n \widehat{w}(\xi - n), \quad u(x) = \sum_{n \in K_{a,\tau}} u_n e^{inx}.$$

Пусть $b = a + \frac{1}{2} \operatorname{diam} \widetilde{\Omega}_0$. Заметим, что

$$\operatorname{supp} \widehat{wu} \subset \widetilde{\Omega}_0 - \xi_0 + M_{a,\tau}.$$

Кроме того, $M_{a,\tau} + \widetilde{\Omega}_0 \subset M_{b,\tau}$. Следовательно, $\widehat{wu}(\xi) = 0$ при $\xi + \xi_0 \in \mathbb{R}^d \setminus M_{b,\tau}$. По лемме 3.3.3

$$\|u\|_{L_{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leqslant C\|wu\|_{L_{\frac{2d}{d-2}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 a^{1/2+1/d} \tau^{1/2-1/d} \|\widehat{wu}\|_{L_2\left(M_{b,\tau} - \xi_0\right)},$$

где мы воспользовались неравенством $b \leqslant 2a$. По построению w мы имеем $\widehat{w}(\xi)\widehat{w}(\xi + n) = 0$, $\forall n \in \widetilde{\Gamma}$, $n \neq 0$. Следовательно,

$$\|\widehat{wu}\|^2_{L_2\left(M_{b,\tau} - \xi_0\right)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{n \in K_{a,\tau}} u_n \hat{w}(\xi - n) \right|^2 d\xi = \sum_{n \in K_{a,\tau}} |u_n|^2 = |\Omega|^{-1} \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Это завершает доказательство леммы. ■

Доказательство предложения 3.2.3. Оператор $H_0(\tau)$ в Фурье-представлении является оператором умножения на символ

$$h_n(\tau) = |n + \xi_0|^2 - \tau^2 + 2i\pi\tau(2n_1 + 1), \quad \xi_0 = \pi b_1 + \xi', \quad \xi' \perp b_1.$$

Представим $n \in \widetilde{\Gamma}$ в виде

$$n = n_1 \tilde{b}_1 + \ldots + n_d \tilde{b}_d = 2\pi n_1 b_1 + n', \quad n' \perp b_1;$$

это возможно, поскольку $\langle n, b_1 \rangle = 2\pi n_1$. Таким образом,

$$|n + \xi_0|^2 = |n + \pi b_1 + \xi'|^2 = \pi^2 (2n_1 + 1)^2 + |n' + \xi'|^2. \tag{3.3.4}$$

Нам понадобится следующее разложение:

$$|h_n(\tau)| = \sqrt{(|n+\pi b_1+\xi'|^2-\tau^2)^2+4\pi^2\tau^2(2n_1+1)^2} = g_{n,+}(\tau)g_{n,-}(\tau),$$

где

$$g_{n,\pm}(\tau) = \sqrt{(\tau\pm|\xi'+n'|)^2+\pi^2(2n_1+1)^2} > 0.$$

Отметим, что

$$g_{n,+}(\tau)\geqslant\tau,\quad g_{n,-}(\tau)\geqslant\pi,\quad g_{n,+}(\tau)\geqslant g_{n,-}(\tau),\quad \forall\tau>0.$$

Через $G_\pm(\tau)$ и $G_\pm^{1/2}(\tau)$ будем обозначать операторы с символами соответственно $g_{n,\pm}(\tau)$, $g_{n,\pm}^{1/2}(\tau)$. Ясно, что

$$|H_0(\tau)|^{1/2} = G_+^{1/2}(\tau)G_-^{1/2}(\tau).$$

Пусть $\tau>\max\{8,2\operatorname{diam}\widetilde{\Omega}\}$. Пусть $j_0\in\mathbb{N}$ — минимальное число, такое что $2^{j_0}\geqslant\frac{1}{2}\operatorname{diam}\widetilde{\Omega}$. Пусть

$$\Gamma_j = \{n\in\widetilde{\Gamma}\colon 2^{j_0+j-1}<g_{n,-}(\tau)\leqslant 2^{j_0+j}\},\quad 1\leqslant j\leqslant[\log_2\tau]-j_0-1,$$

$$\Gamma_0 = \{n\in\widetilde{\Gamma}\colon g_{n,-}(\tau)\leqslant 2^{j_0}\},$$

$$\Gamma_c = \bigcup_{j=0}^{[\log_2\tau]-j_0-1}\Gamma_j,$$

$$\Gamma_r = \{n\in\widetilde{\Gamma}\colon g_{n,-}(\tau)>2^{[\log_2\tau]-1}\}.$$

Ясно, что $\tilde{\Gamma}=\Gamma_c\cup\Gamma_r$. Пусть $u\in\operatorname{Dom}|H_0(\tau)|^{1/2}=H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$. Представим u в виде

$$u = u_c+u_r = \sum_{n\in\Gamma_c}u_n|\Omega|^{-1/2}e^{inx}+\sum_{n\in\Gamma_r}u_n|\Omega|^{-1/2}e^{inx}.$$

Докажем оценку (3.2.5) для u_r. Мы имеем

$$g_{n,-}(\tau) = \sqrt{(\tau-|\xi'+n'|)^2+\pi^2(2n_1+1)^2}\geqslant\tau/4,\quad n\in\Gamma_r.$$

Покажем, что имеет место неравенство $g_{n,-}(\tau)\geqslant C|n+\xi_0|$. Действительно, если $|n+\xi_0|^2\leqslant16\tau^2$, то это очевидно. Пусть $|n+\xi_0|^2>16\tau^2$. Тогда, используя (3.3.4),

$$g_{n,-}(\tau) = \sqrt{(\tau-|\xi'+n'|)^2+\pi^2(2n_1+1)^2} = \sqrt{|n+\xi_0|^2+\tau^2-2\tau|n'+\xi'|}$$

$$\geqslant \sqrt{|n+\xi_0|^2+\tau^2-\frac{1}{2}|n+\xi_0|^2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}|n+\xi_0|,$$

поскольку $\tau \leqslant \frac{1}{4}|n+\xi_0|$, $|n'+\xi'| \leqslant |n+\xi_0|$. Отсюда $g_{n,+} \geqslant g_{n,-} \geqslant C|n+\xi_0|$ и, таким образом,

$$|h_n(\tau)| = g_{n,+}(\tau)g_{n,-}(\tau) \geqslant C|n+\xi_0|^2,$$

откуда при при $\tau > 0$

$$\||H_0(\tau)|^{1/2}u_r\|^2 \geqslant C\|u_r\|^2_{H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)} \geqslant C_1\|u_r\|^2_{L_{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}$$

в силу вложения $H^1_{\mathrm{per}}(\Omega) \subset L_{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$.

Оценим u_c. Пусть

$$u_c^{(j)} = \sum_{n\in\Gamma_j} u_n|\Omega|^{-1/2}e^{inx}, \quad 0 \leqslant j \leqslant [\log_2\tau]-j_0-1.$$

Заметим, что $\Gamma_j \subset K_{2^{j_0+j},\tau}$, так как из $g_{n,-}(\tau) \leqslant 2^{j_0+j}$ следует

$$|\tau-|\xi'+n'|| \leqslant 2^{j_0+j}, \quad |2\pi n_1+\xi_1| = \pi|2n_1+1| \leqslant 2^{j_0+j},$$

$$\forall n \in \Gamma_j, \quad 0 \leqslant j \leqslant [\log_2\tau]-j_0-1.$$

Применим лемму 3.3.4 с $a = 2^{j_0+j}$, а также оценку $g_{n,-}(\tau) \geqslant \pi$ при $j=0$ и $g_{n,-}(\tau) \geqslant 2^{j_0+j-1}$ при $j>0$, $n \in \Gamma_j$:

$$\|u_c^{(j)}\|_{L_{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leqslant C\tau^{1/2-1/d}2^{j_0(1/2+1/d)}2^{j(1/2+1/d)}\|u_c^{(j)}\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant C(\widetilde{\Omega})\tau^{1/2-1/d}2^{j/d}\|G_-^{1/2}(\tau)u_c^{(j)}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\|u_c\|_{L_{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \leqslant \sum_{j=0}^{[\log_2\tau]-j_0-1} \|u_c^{(j)}\|_{L_{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}$$
$$\leqslant C(\widetilde{\Omega})\tau^{1/2-1/d}\sum_{j=0}^{[\log_2\tau]-j_0-1} 2^{j/d}\|G_-^{1/2}(\tau)u_c^{(j)}\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant C(\widetilde{\Omega})\tau^{1/2-1/d}\|G_-^{1/2}(\tau)u_c\|_{L_2(\Omega)}\sum_{j=0}^{[\log_2\tau]-j_0-1} 2^{j/d} \leqslant C_1(\widetilde{\Omega})\tau^{1/2}\|G_-^{1/2}(\tau)u_c\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leqslant C_1(\widetilde{\Omega})\||H_0(\tau)|^{1/2}u_c\|_{L_2(\Omega)},$$

в силу $\|G_+^{1/2}(\tau)v\|_{L_2(\Omega)} \geqslant \tau^{1/2}\|v\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|G_-^{1/2}(\tau)u_c^{(j)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|G_-^{1/2}(\tau)u_c\|_{L_2(\Omega)}$. ∎

3.4 Доказательство теоремы 3.1.1

Зафиксируем некоторое ξ' и построим операторное семейство $H_0(\tau)$ из раздела 1.2.3. По теореме 1.2.4 достаточно проверить для этого семейства условия $A(q_1)$ и $B(q_2)$. Оператор $H_0(\tau)$ действует на вектор-функции из $\mathbb{C}^N$, не перемешивая их компоненты, и является ортогональной суммой N скалярных операторов, отличающихся только краевыми условиями; на каждой паре противоположных граней заданы условия Дирихле или Неймана. Поэтому условия $A(q_1)$ и $B(q_2)$ достаточно проверять для $N = 1$.

Мы будем использовать прием с отражениями, впервые примененный к задаче абсолютной непрерывности в [34]. Пусть $T\colon L_2(U\times\Omega)\to L_2(\widehat{U}\times\Omega)$ — оператор, продолжающий функцию по координатам x с U на $\widehat{U}$ четным образом через границы с условием Неймана и нечетным — через границы с условием Дирихле. Собственные функции оператора Лапласа в U с краевыми условиями (3.1.2) переходят в собственные функции оператора Лапласа в $\widehat{U}$ с периодическими краевыми условиями и теми же собственными значениями. Отсюда $TH^1_{\mathcal{C}}(U\times\Omega)\subset H^1_{\mathrm{per}}(\widehat{U}\times\Omega)$. Кроме того, верны соотношения

$$\|Tu\|_{L_r(\widehat{U}\times\Omega)} = 2^{k/r}\|u\|_{L_r(U\times\Omega)},\quad \widehat{H}_0(\tau)Tu = TH_0(\tau)u,$$
$$|\widehat{H}_0(\tau)|^{1/2}Tu = T|H_0(\tau)|^{1/2}u, \quad (3.4.1)$$

а также

$$|\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}Tu = T|H_0(\tau)|^{-1/2}u,\quad \tau>0, \quad (3.4.2)$$

в случае, если правые часть определены. Равенства проверяются разложением по собственным функциям оператора $H_0(\tau)$. Пусть $q_2<\frac{2(d-1)}{d-2}$. Тогда из (3.4.2), леммы 3.2.2 и (3.4.1) при $\tau>\tau_0$ вытекает

$$\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\|^2_{L_{q_2}(\Sigma\cap(U\times\Omega))}\leqslant \||\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2}Tu\|^2_{L_{q_2}(\widehat{\Sigma})}$$
$$\leqslant C(q_2,\tau)\|Tu\|^2_{L_2(\widehat{U}\times\Omega)} = 2^kC(q_2,\tau)\|u\|^2_{L_2(U\times\Omega)}. \quad (3.4.3)$$

Поскольку $C(q_2,\tau)\to 0$, отсюда следует выполнение условия $B(q_2)$ для семейства $H_0(\tau)$.

Точно так же, используя предложение 3.2.3, доказывается

$$\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\|^2_{L_{\frac{2d}{d-2}}((U\times\Omega);\mathbb{C}^N)}\leqslant C\|u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)},\quad \tau\geqslant\tau_0.$$

Таким образом, мы проверили условия $A(q_1)$ и $B(q_2)$ для семейства $H_0(\tau)$ при $q_1=\frac{2d}{d-2}$, $1\leqslant q_2<\frac{2(d-1)}{d-2}$. По теореме 1.2.4 отсюда следует утверждение теоремы 3.1.1. ∎

Замечание 3.4.1. В скалярном случае (то есть при $N = 1$) в качестве U вместо параллелепипеда можно рассматривать гладкое компактное риманово многообразие без края. Требования к Σ и σ будут теми же, но условие на электрический потенциал будет иметь вид $V \in L_{p,\mathrm{loc}}(U \times \mathbb{R}^m)$, $p > d/2$, так как вместо результатов [11] придется применять теорему 4.1.4 из Главы 4.

Глава 4

Случай электрического потенциала в цилиндрах с сечением общего вида

4.1 Введение

В данной главе будет установлено отсутствие собственных значений у периодического оператора Шрёдингера (в самосопряженном случае — абсолютная непрерывность спектра) с обычным электрическим потенциалом в случае, когда цилиндр $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$ не является прямоугольным. Методы Главы 3, базирующиеся на явном виде собственных функций оператора Лапласа в ячейке, здесь неприменимы.

Напомним, что оператор задается квадратичной формой

$$h[u,v] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a[u(\cdot,y), v(\cdot,y)]\,dy + \int\limits_{\Xi} \langle \nabla_y u(x,y), \nabla_y v(x,y)\rangle\,dx\,dy \\ + \int\limits_{\Xi} \langle V(x,y)u(x,y), v(x,y)\rangle\,dx\,dy \quad (4.1.1)$$

в цилиндре $L_2(\Xi;\mathbb{C}^N)$, где $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$; U — ограниченная область в $\mathbb{R}^k$ с липшицевой границей. Потенциал V периодичен относительно решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ с элементарной ячейкой Ω. Полуторалинейная форма (4.1.1) определена на области

$$\operatorname{Dom} h = L_2(U; H^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}^N)) \cap L_2(\mathbb{R}^m; \operatorname{Dom} a).$$

Теорема 4.1.1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — ограниченная область с липшицевой границей, $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, $d = k + m \geqslant 3$. Пусть a — замкнутая* *неотрицательная квадратичная форма в $L_2(U;\mathbb{C}^N)$, такая что* $\operatorname{Dom} a$ *– замкнутое подпространство $H^1(U;\mathbb{C}^N)$,* $\operatorname{Dom} a \cap C^1(\overline{U};\mathbb{C}^N)$ *плотно в* $\operatorname{Dom} a$. *Пусть $V \in L_{d-1}(U \times \Omega; M_N(\mathbb{C}))$. Тогда в спектре оператора H, отвечающего квадратичной форме* (4.1.1), *отсутствуют собственные значения. Если V самосопряжен, то спектр H абсолютно непрерывен.*

В частности, при $N = 1$ и

$$a[u, v] = \int_U \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx, \quad \operatorname{Dom} a = H_0^1(U) \text{ или } H^1(U)$$

получаем, что спектр обычного оператора Шрёдингера $H = -\Delta + V$ с условиями Дирихле или Неймана абсолютно непрерывен. В теореме 4.1.1 допускается достаточно негладкая (липшицева) граница. В случае гладкой границы и скалярного оператора H условия суммируемости на потенциал V можно немного ослабить.

Теорема 4.1.2. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ — ограниченная область с C^∞-гладкой границей, $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, $d = k + m \geqslant 3$. Пусть $N = 1$, V — скалярная вещественная функция, $V \in L_p(U \times \Omega)$, где $p > d/2$ при $d = 3, 4$, $p > d-2$ при $d \geqslant 5$. Тогда спектр оператора $H = -\Delta + V$ с краевыми условиями Дирихле или Неймана абсолютно непрерывен.*

В случае сечения общего вида вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора с сингулярным потенциалом или с краевым условием третьего типа остается открытым.

Согласно результатам Главы 1, обе теоремы сводятся к проверке условий $\mathrm{A}(q)$ для соответствующих свободных операторов.

Теорема 4.1.3. *В условиях теоремы* 4.1.1 *оператор $H_0(\xi)$, построенный в Главе* 1, *удовлетворяет условию $\mathrm{A}(\frac{2d-2}{d-2})$.*

Мы докажем теорему 4.1.3 в разделе 4.2. Доказательство основано на теоремах вложения для анизотропных пространств Соболева. В силу произвольности формы a, теорема 4.1.3 включает в себя случай векторного оператора с краевыми условиями, нетривиально зависящими от точки границы. Мы будем использовать ее в следующей главе.

Теорема 4.1.4. *Пусть $N = 1$, $k \geqslant 2$, U — C^∞-гладкое компактное k-мерное риманово многообразие с краем или без края. Пусть a — квадратичная форма неотрицательного эллиптического дифференциального оператора второго порядка с гладкими коэффициентами и краевыми условиями Дирихле или Неймана. Тогда оператор $H_0(\xi)$, построенный в Главе* 1, *удовлетворяет условию $\mathrm{A}(q)$ при $q < \frac{2d}{d-2}$, в случае, если U —*

многообразие без края (при любом d), и в случае, если U — многообразие с краем при $d = 3$ или $d = 4$. Если $d \geqslant 5$ и U — многообразие с краем, то условие $\mathrm{A}(q)$ *выполняется с* $q < \frac{2d-4}{d-3}$.

Мы докажем теорему 4.1.4 в разделе 4.3. Доказательство опирается на оценки спектральных проекторов [31], известные, по-видимому, только для скалярных операторов.

Следуя обозначениям из Главы 1, пусть $H_0(\xi)$ — оператор, заданный квадратичной формой (1.2.15). Пусть $\varphi_l(x)$ — собственные функции оператора A, заданного квадратичной формой $a[\cdot,\cdot]$ на области определения $\mathrm{Dom}\, a$, $A\varphi_l = \lambda_l\varphi_l$. Тогда в базисе

$$\varphi_{l,n}(x,y) = |\Omega|^{-1/2} e^{iny}\varphi_l(x), \tag{4.1.2}$$

оператор $H_0((\pi + i\tau)b_1 + \xi')$, который мы будем сокращенно обозначать через $H_0(\tau)$, является оператором умножения на символ

$$h_{l,n}(\tau) = |n + \pi b_1 + \xi'|^2 - \tau^2 + \lambda_l + 2i\tau\langle n + \pi b_1, b_1\rangle, \quad n \in \widetilde{\Gamma}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Напомним, что $\widetilde{\Gamma} \subset \mathbb{R}^m$ — решетка, двойственная к Γ. Справедливы неравенства:

$$|h_{l,n}(\tau)| \geqslant |\operatorname{Im} h_{l,n}(\tau)| = 2\tau|\langle n, b_1\rangle + \pi| \geqslant 2\pi\tau, \tag{4.1.3}$$

$$(|H_0(\tau)|v, v) \geqslant 2\pi\tau\|v\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}, \quad \forall v \in \mathrm{Dom}(|H_0(\tau)|^{1/2}), \tag{4.1.4}$$

$$|\operatorname{Im} h_{l,n}(\tau)| \geqslant 3\tau(|n_1| + 1). \tag{4.1.5}$$

Кроме того,

$$\|u\|^2_{H^1(U;\mathbb{C}^N)} \leqslant C(a[u,u] + \|u\|^2_{L_2(U;\mathbb{C}^N)}), \quad \forall u \in \mathrm{Dom}\, a,$$

$$\|u\|^2_{H^1(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant C\Bigg(\int\limits_{\Omega} a[u(\cdot,y), u(\cdot,y)]\, dy + \int\limits_{U\times\Omega} |\nabla_y u(x,y)|^2\, dx\, dy + \|u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}\Bigg), \quad \forall u \in \mathrm{Dom}(|H_0(\tau)|^{1/2}). \tag{4.1.6}$$

4.2 Доказательство теоремы 4.1.3

При каждом τ введем три подмножества пар индексов $(l,n) \in \mathbb{N} \times \widetilde{\Gamma}$:

$$J_1 = \{(l,n) : |n + \pi b_1 + \xi'|^2 + \lambda_l \leqslant \frac{1}{2}\big(n^2 + \lambda_l + 1\big)\},$$
$$J_2 = \{(l,n) : n^2 + \lambda_l + 1 \leqslant 4\tau^2\},$$
$$J_3 = \{(l,n) : |n + \pi b_1 + \xi'|^2 + \lambda_l > \frac{1}{2}\big(n^2 + \lambda_l + 1\big) > 2\tau^2\}.$$

Ясно, что
$$\mathbb{N} \times \widetilde{\Gamma} = J_1 \cup J_2 \cup J_3.$$

Лемма 4.2.1. *а) Множество J_1 конечно и не зависит от τ.*

б) Если $(l,n) \in J_2$, то
$$|\tau h_{l,n}(\tau)| \geqslant \frac{3}{4}(|n_1| + 1)\big(n^2 + \lambda_l + 1\big). \tag{4.2.1}$$

в) Если $(l,n) \in J_3$, то
$$|h_{l,n}(\tau)| > \frac{1}{4}\big(n^2 + \lambda_l + 1\big).$$

Доказательство. Утверждение пункта а) очевидно.

б) Вытекает из (4.1.5) и условия $4\tau^2 \geqslant n^2 + \lambda_l + 1$.

в) Пусть $(l,n) \in J_3$. Тогда
$$\operatorname{Re} h_{l,n}(\tau) = |n + \pi b_1 + \xi'|^2 + \lambda_l - \tau^2 > \frac{1}{4}\big(n^2 + \lambda_l + 1\big). \ \blacksquare$$

4.2.1 Вложение $\operatorname{Dom}|H_0(\tau)|^{1/2} \subset L_{\frac{2d-2}{d-2}}$

Пусть $u \in \operatorname{Dom}|H_0(\tau)|^{1/2}$. Функцию u можно разложить по базису (4.1.2):
$$u(x,y) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{l \in \mathbb{N}, n \in \tilde{\Gamma}} u_{l,n} e^{iny} \varphi_l(x). \tag{4.2.2}$$

Тогда
$$\||H_0(\tau)|^{1/2} u\|^2_{L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)} = \sum_{l,n} |h_{l,n}(\tau)||u_{l,n}|^2. \tag{4.2.3}$$

Лемма 4.2.2. *Пусть* $u \in \operatorname{Dom}|H_0(\tau)|^{1/2}$, *причем*

$$u(x,y) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{(l,n)\in J_2} u_{l,n}\varphi_l(x)e^{iny}$$

(*подчеркнем, что суммирование только по* J_2). *Тогда*

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant C\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}. \tag{4.2.4}$$

Эту лемму мы докажем в следующем пункте.

Лемма 4.2.3. *Пусть* $u \in \operatorname{Dom}|H_0(\tau)|^{1/2}$, *причем*

$$u(x,y) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{(l,n)\in J_3} u_{l,n}\varphi_l(x)e^{iny}$$

(*суммирование только по* J_3). *Тогда*

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant C\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}.$$

Доказательство. В силу вложения

$$H^1(U\times\Omega) \subset L_{\frac{2d}{d-2}}(U\times\Omega),$$

и (4.1.6) имеем

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant C\|u\|^2_{H^1(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int\limits_{\Omega} a[u(\cdot,y),u(\cdot,y)]\,dy + \int\limits_{U\times\Omega} |\nabla_y u(x,y)|^2\,dx\,dy + \|u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}\right)$$

$$= C\sum_{(l,n)\in J_3}\left(n^2+\lambda_l+1\right)|u_{l,n}|^2.$$

Используя ограниченность области $U\times\Omega$, применяя формулу (4.2.3) и лемму 4.2.1 в), получаем оценку

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant C\|u\|^2_{L_{\frac{2d}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant C_1\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}. \blacksquare$$

Доказательство теоремы 4.1.3. Представим функцию u в виде $u = u_1 + u_2 + u_3$, где

$$u_k(x,y) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{(l,n)\in J_k} u_{l,n}\varphi_l(x)e^{iny}, \quad k = 1,2,3.$$

Это возможно, так как $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \mathbb{N} \times \widetilde{\Gamma}$. При этом можно считать, что для каждой пары (l,n) соответствующий коэффициент $u_{l,n}$ отличен от нуля не более, чем для одной функции u_1, u_2 или u_3.

Множество J_1 конечно и не зависит от τ. Соответствующее пространство конечномерно, поэтому L_2-норма в нем эквивалентна $L_{\frac{2d-2}{d-2}}$-норме. Используя (4.1.4), получаем при $\tau \geqslant 1$

$$\|u_1\|_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant C\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)},$$

где C не зависит от τ. Для u_2 имеем лемму 4.2.2, для u_3 – лемму 4.2.3. Далее применяем тривиальные неравенства

$$\|u\|_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant \|u_1\|_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} + \|u_2\|_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} + \|u_3\|_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}$$

и $\||H_0(\tau)|^{1/2}u_k\|^2 \leqslant \||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2$, $k = 1,2,3$. ∎

Остается доказать лемму 4.2.2.

4.2.2 Доказательство леммы 4.2.2

Через $H^{1/2}([0;1];Y)$, где Y – некоторое гильбертово пространство, будем обозначать множество функций вида

$$u(y_1) = \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} u_{n_1}e^{2\pi i n_1 y_1},$$

где $y_1 \in [0;1]$, $u_{n_1} \in Y$, с нормой

$$\|u\|^2_{H^{1/2}([0,1];Y)} = \sum_{n_1\in\mathbb{Z}} (|n_1|+1)\|u_{n_1}\|^2_Y. \tag{4.2.5}$$

Пусть $2 < s < +\infty$, $\hat{u} = \{u_{n_1}\}_{n_1\in\mathbb{Z}}$. Тогда по неравенствам Хаусдорфа-Юнга и Гёльдера

$$\|u\|_{L_s([0,1];Y)} \leqslant C\|\hat{u}\|_{l_{s'}(\mathbb{Z};Y)} \leqslant C\|\{(|n_1|+1)^{1/2}u_{n_1}\}\|_{l_2(\mathbb{Z};Y)}\|\{(|n_1|+1)^{-1/2}\}\|_{l_r(\mathbb{Z})}$$
$$\leqslant C(r)\|u\|_{H^{1/2}([0,1];Y)},$$

где $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{2}=\frac{1}{s'}$. Следовательно,

$$H^{1/2}([0;1];Y)\subset L_s([0;1];Y),\quad 2<s<\infty \tag{4.2.6}$$

(разумеется, вложение (4.2.6) верно и при $s\leqslant 2$.) Пусть

$$\Omega'=\left\{y'=\sum_{j=2}^{m}y_jb_j,\ y_j\in[0,1)\right\}\subset\mathbb{R}^{m-1},\qquad \text{при } m\geqslant 2, \tag{4.2.7}$$

и $\Omega'=\{0\}$ при $m=1$. Имеется естественное соответствие между $L_2(\Omega)$ и $L_2([0;1];L_2(\Omega'))$.

Лемма 4.2.4. *Для любого* $u\in\operatorname{Dom}|H_0(\tau)|^{1/2}$ *имеем*

$$\|u\|^2_{H^{1/2}([0;1];L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}\leqslant C\tau^{-1}\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}.$$

Доказательство. Разложим u в ряд (4.2.2). Если $m\geqslant 2$,

$$n'=n_2b_2'+\ldots+n_mb_m',\quad n=n_1b_1'+n'.$$

Используя ортогональность экспонент $e^{in'y'}$ в $L_2(\Omega')$, получаем

$$\|u\|^2_{H^{1/2}([0;1];L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}=|\Omega|^{-1}\sum_{n_1}(|n_1|+1)\int\limits_U\int\limits_{\Omega'}\left|\sum_{l,n'}u_{l,n}\varphi_l(x)e^{in'y'}\right|^2dy'dx$$

$$=|\Omega'||\Omega|^{-1}\sum_{n}(|n_1|+1)\sum_{l}|u_{l,n}|^2.$$

Если $m=1$, то сразу по определению (4.2.5)

$$\|u\|^2_{H^{1/2}([0;1];L_2(U;\mathbb{C}^N))}=\sum_n(|n|+1)\sum_l|u_{l,n}|^2.$$

Теперь утверждение вытекает из формул (4.2.3) и (4.1.5). ∎

Лемма 4.2.5. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2.2. *Тогда*

$$\|u\|^2_{H^{1/2}([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}\leqslant C\tau\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}.$$

Доказательство. По аналогии с доказательством предыдущей леммы имеем

$$\|u\|^2_{H^{1/2}([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}=|\Omega|^{-1}\sum_{n_1}(|n_1|+1)\int\limits_U\int\limits_{\Omega'}\Big(\big|\sum_{l,n'}u_{l,n}\varphi_l(x)e^{in'y'}\big|^2$$

$$+\big|\nabla_x\sum_{l,n'}u_{l,n}\varphi_l(x)e^{in'y'}\big|^2+\big|\nabla_{y'}\sum_{l,n'}u_{l,n}\varphi_l(x)e^{in'y'}\big|^2\Big)dy'dx$$

$$=\frac{|\Omega'|}{|\Omega|}\sum_n(|n_1|+1)\left(\left\|\sum_l u_{l,n}\varphi_l\right\|^2_{H^1(U;\mathbb{C}^N)}+|n'|^2\left\|\sum_l u_{l,n}\varphi_l\right\|^2_{L_2(U;\mathbb{C}^N)}\right),$$

где подразумевается, что в суммировании участвуют только пары $(l,n) \in J_2$; при $m=1$ последнее слагаемое в правой части отсутствует. Далее,

$$\left\| \sum_l u_{l,n}\varphi_l \right\|^2_{H^1(U;\mathbb{C}^N)} \leqslant C \sum_l (\lambda_l+1)|u_{l,n}|^2.$$

Получаем

$$\|u\|^2_{H^{1/2}((0,1);H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))} \leqslant C_1 \sum_{(l,n)\in J_2} (|n_1|+1)\left(|n'|^2+\lambda_l+1\right)|u_{l,n}|^2.$$

Остается сослаться на лемму 4.2.1 б) и формулу (4.2.3). ∎

Лемма 4.2.6. *Имеют место следующие неравенства.*

а) $\|f^2\|_{W_1^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)} \leqslant 3\|f\|_{H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}\|f\|_{L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}$, $\forall f \in H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)$.

б) Пусть $q \geqslant 2$. *Тогда*

$$\|u\|^2_{L_q\left([0;1];L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)\right)} \leqslant C\|u\|_{L_q([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}\|u\|_{L_q([0;1];L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))},$$

$$\forall u \in L_q([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)).$$

Доказательство. а) Имеем

$$\begin{aligned}\left\|f^2\right\|_{W_1^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)} &= \int\limits_{U\times\Omega'} \left(\left|\nabla(f^2)\right| + \left|f^2\right|\right) dx\,dy' \leqslant \int\limits_{U\times\Omega'} |f|\left(2|\nabla f|+|f|\right) dx\,dy' \\ &\leqslant \left(2\|\nabla f\|_{L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^{N\times(d-1)})} + \|f\|_{L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}\right)\|f\|_{L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)} \\ &\leqslant 3\|f\|_{H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}\|f\|_{L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}.\end{aligned}$$

б) Заметим, что

$$\|u\|^2_{L_q\left([0;1];L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)\right)} = \left\|u^2\right\|_{L_{q/2}\left([0;1];L_{\frac{d-1}{d-2}}(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)\right)}.$$

Из теоремы вложения $W_1^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N) \subset L_{\frac{d-1}{d-2}}(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)$ следует оценка

$$\left\|u^2\right\|_{L_{q/2}\left([0;1];L_{\frac{d-1}{d-2}}(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)\right)} \leqslant C\left\|u^2\right\|_{L_{q/2}\left([0;1];W_1^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)\right)}.$$

Далее, в силу пункта а)

$$\|u^2\|^q_{L_{q/2}\left([0;1];W_1^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)\right)} = \left(\int\limits_0^1 \|u^2(y_1)\|^{q/2}_{W_1^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}\,dy_1\right)^2$$

$$\leqslant 3^q\left(\int\limits_0^1 \|u(y_1)\|^{q/2}_{H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}\|u(y_1)\|^{q/2}_{L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}dy_1\right)^2$$

$$\leqslant 3^q\int\limits_0^1 \|u(y_1)\|^q_{H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}dy_1\int\limits_0^1 \|u(y_1)\|^q_{L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)}dy_1$$

$$= 3^q\|u\|^q_{L_q([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}\|u\|^q_{L_q([0;1];L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}. \blacksquare$$

Доказательство леммы 4.2.2. По лемме 4.2.6 б) при $q=(2d-2)/(d-2)$ имеем

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)} \leqslant \|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}\left([0;1];L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)\right)}$$

$$\leqslant C\|u\|_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}\|u\|_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}([0;1];L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}. \qquad (4.2.8)$$

Далее, в силу (4.2.6) при $s=(2d-2)/(d-2)$ и леммы 4.2.4

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}([0;1];L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))} \leqslant C\|u\|^2_{H^{1/2}([0;1];L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))} \leqslant C'\tau^{-1}\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2,$$

а в силу (4.2.6) и леммы 4.2.5

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))} \leqslant C\|u\|^2_{H^{1/2}([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))} \leqslant C'\tau\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2.$$

Перемножая последние два неравенства и учитывая (4.2.8), получаем (4.2.4). $\blacksquare$

Замечание 4.2.7. Доказательство леммы 4.2.6 аналогично доказательству неравенства Ладыженской $\|u\|^2_{L_4}\leqslant c\|u\|_{H^1}\|u\|_{L_2}$ в двумерной области, см. [23].

4.3 Доказательство теоремы 4.1.4

4.3.1 Оценки спектральных проекторов в L_q

Для самосопряженного оператора A обозначим через $E_\mu = E_A([(\mu-1)^2;\mu^2))$ его спектральный проектор на подпространство, отвечающее отрезку $[(\mu-1)^2;\mu^2)$. В [36] доказана следующая

Теорема 4.3.1. *Пусть M — C^∞-гладкое компактное риманово многообразие размерности d без края, A — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка на M с гладкими коэффициентами. Тогда*

$$\|E_\mu f\|_{L_2(M)} \leqslant C\mu^{d(1/p-1/2)-1/2}\|f\|_{L_p(M)},$$
$$\forall f \in L_p(M), \quad 1 \leqslant p \leqslant \frac{2(d+1)}{d+3}, \quad \mu \geqslant 1.$$

По двойственности отсюда вытекает

Следствие 4.3.2. *В условиях теоремы* 4.3.1 *имеет место неравенство*

$$\|E_\mu f\|_{L_q(M)} \leqslant C\mu^{d(1/2-1/q)-1/2}\|f\|_{L_2(M)},$$
$$\forall f \in L_2(M), \quad \frac{2(d+1)}{d-1} \leqslant q \leqslant +\infty, \quad \mu \geqslant 1. \quad (4.3.1)$$

Указанное неравенство остается справедливым (возможно, с другой константой), если заменить A на $A + \mu_0$ при любом $\mu_0 \geqslant 0$. *В дальнейшем будем предполагать, что все собственные значения оператора A неотрицательны.*

В случае многообразия с краем оценка (4.3.1) известна при более ограничительных условиях на q. Следующая теорема доказана в [31, теорема 7.1].

Теорема 4.3.3. *Пусть M — C^∞-гладкое компактное риманово многообразие размерности $d \geqslant 3$ с краем. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка на M с гладкими коэффициентами. Пусть u решает задачу Коши на $\mathbb{R} \times M$:*

$$\partial_t^2 u(t,x) + Au(t,x) = 0, \quad u(0,x) = g(x), \quad \partial_t u(0,x) = 0 \qquad (4.3.2)$$

и удовлетворяет краевым условиям Дирихле

$$u(t,x) = 0, \quad x \in \partial M,$$

или условиям Неймана

$$N_x \cdot \nabla_x u(t,x) = 0, \quad x \in \partial M,$$

где N_x — единичное векторное поле, конормальное к границе. Пусть

$$4 \leqslant q \leqslant \infty \text{ при } d \geqslant 4; \quad 5 \leqslant q \leqslant \infty \text{ при } d = 3. \qquad (4.3.3)$$

Тогда

$$\|u\|_{L_2([-1;1];L_q(M))} \leqslant C\|g\|_{H^{d(1/2-1/q)-1/2}(M)}, \quad g \in L_2(M). \qquad (4.3.4)$$

Оценка вида (4.3.1) выводится из теоремы 4.3.3 в работе [32]; поскольку этот вывод несложен, приведем его.

Теорема 4.3.4. *Пусть M — C^∞-гладкое компактное риманово многообразие размерности $d \geqslant 3$ с краем. Пусть A — неотрицательный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка на M с гладкими коэффициентами и краевыми условиями Дирихле или Неймана. Тогда в обозначениях теоремы* 4.3.1 *и при условии* (4.3.3) *выполняется оценка* (4.3.1).

Доказательство. Пусть $\{\lambda_j\}$, $\{\varphi_j\}$ — собственные значения и собственные функции оператора A. Пусть

$$f = E_\mu f = \sum_{\lambda_j \in [(\mu-1)^2;\mu^2)} c_j \varphi_j.$$

Непосредственно проверяется равенство

$$\sum_j c_j \varphi_j = \int_{-1}^{1} e^{-it\mu} \sum_j \tilde{c}_j \cos(t\sqrt{\lambda_j})\varphi_j \, dt,$$

где

$$\tilde{c}_j = \left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} - \mu)}{\sqrt{\lambda_j} - \mu} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} + \mu)}{\sqrt{\lambda_j} + \mu} \right]^{-1} c_j. \tag{4.3.5}$$

Поскольку $|\sqrt{\lambda_j} - \mu| \leqslant 1$, верно

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} - \mu)}{\sqrt{\lambda_j} - \mu} \geqslant \sin 1 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j} + \mu)}{\sqrt{\lambda_j} + \mu} \geqslant \min_{x \in \mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} > -\frac{1}{\pi},$$

так как $|\frac{\sin x}{x}| \leqslant \frac{1}{\pi}$ при $|x| \geqslant \pi$. Следовательно, $|\tilde{c}_j| \leqslant B|c_j|$ для некоторой $B > 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_q(M)} = \left\| \int_{-1}^{1} e^{-it\mu} \sum_j \tilde{c}_j \cos(t\sqrt{\lambda_j})\varphi_j \, dt \right\|_{L_q(M)} \\ \leqslant \sqrt{2} \left\| \sum_j \tilde{c}_j \cos(t\sqrt{\lambda_j})\varphi_j \right\|_{L_2([-1;1];L_q(M))}. \end{aligned}$$

Функция $u(t,x) = \sum \tilde{c}_j \cos(t\sqrt{\lambda_j})\varphi_j(x)$ является решением задачи Коши (4.3.2) с начальным данным $g(x) = \sum \tilde{c}_j\varphi_j(x)$. Поэтому

$$\|f\|_{L_q(M)} \leqslant \sqrt{2}\|\sum_j \tilde{c}_j \cos(t\sqrt{\lambda_j})\varphi_j\|_{L_2([-1;1];L_q(M))}$$
$$\leqslant C\|\sum_j \tilde{c}_j\varphi_j\|_{H^{d(1/2-1/q)-1/2}(M)}.$$

Пусть $\varphi = \sum_j \tilde{c}_j\varphi_j$. Тогда

$$\|\varphi\|^2_{H^{d(1/2-1/q)-1/2}(M)} \leqslant C(\||A|^{d(1/4-1/2q)-1/4}\varphi\|^2_{L_2(M)} + \|\varphi\|^2_{L_2(M)})$$
$$= C\sum_j |\tilde{c}_j|^2(\lambda_j^{d(1/2-1/q)-1/2} + 1).$$

С учетом этого

$$\|f\|^2_{L_q(M)} \leqslant C\|\sum_j \tilde{c}_j\varphi_j\|^2_{H^{d(1/2-1/q)-1/2}(M)} \leqslant C\sum_j(\lambda_j^{d(1/2-1/q)-1/2} + 1)|\tilde{c}_j|^2$$
$$\leqslant CB^2\mu^{2d(1/2-1/q)-1}\sum_j |c_j|^2.$$

Последнее неравенство следует из $\sqrt{\lambda_j} \leqslant \mu$. Оценка (4.3.1) доказана. ∎

Для случая $2 \leqslant q < 4$ можно получить более слабую оценку, чем (4.3.1).

Теорема 4.3.5. *Пусть M — C^∞-гладкое компактное риманово многообразие размерности $d \geqslant 4$ с краем. Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка на M с гладкими коэффициентами и краевыми условиями Дирихле или Неймана. Тогда в обозначениях теоремы* 4.3.1 *выполняется неравенство*

$$\|E_\mu f\|_{L_q(M)} \leqslant C\mu^{d(1/2-1/q)+2/q-1}\|f\|_{L_2(M)}, \quad 2 \leqslant q \leqslant 4, \quad \lambda \geqslant 1. \qquad (4.3.6)$$

Доказательство. Имеет место тривиальное неравенство

$$\|E_\mu f\|_{L_2(M)} \leqslant \|f\|_{L_2(M)}.$$

Кроме того, в силу теоремы 4.3.4, неравенство (4.3.1) выполняется при $q = 4$:

$$\|E_\mu f\|_{L_4(M)} \leqslant C\mu^{d/4-1/2}\|f\|_{L_2(M)}.$$

Пусть $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{4}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Тогда в силу интерполяционной теоремы 2.2.4 Рисса-Торина

$$\|E_\mu f\|_{L_q(M)} \leqslant C\mu^{\theta(d/4-1/2)}\|f\|_{L_2(M)}.$$

Подставив сюда $\theta = 2 - 4/q$, получаем неравенство (4.3.6). ∎

4.3.2 Доказательство теоремы 4.1.4

В условиях теоремы для оператора $-\Delta_y + A$ на $U \times \Omega$, где оператор A отвечает квадратичной форме $a[\cdot,\cdot]$ в $L_2(U)$, с краевыми условиями Дирихле или Неймана на $\partial U \times \Omega$ и периодическими условиями на $U \times \partial\Omega$ справедлива оценка

$$\|E_\mu f\|_{L_q(U\times\Omega)} \leqslant C\mu^{\frac{1}{2}-\delta}\|f\|_{L_2(U\times\Omega)}$$

для некоторого $\delta > 0$. В случае многообразия без края она верна для $1 \leqslant q < \frac{2d}{d-2}$ и следует из (4.3.1). В случае многообразия с краем и $d = 3$ она верна для тех же q и следует из теоремы 4.3.4. Наконец, для случая многообразия с краем размерности $d \geqslant 4$ она выполняется при $1 \leqslant q < \frac{2d-4}{d-3}$ в силу (4.3.6).

Дальнейшие рассуждения фактически повторяют доказательство леммы 3.2.2. Пусть E_μ — спектральный проектор для оператора $-\Delta_y + A$ в $L_2(U \times \Omega)$. Для указанных q имеем

$$\begin{aligned}\left\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|_{L_q(U\times\Omega)} &\leqslant \sum_{\mu=1}^{\infty}\left\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|_{L_q(U\times\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant C\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{1/2-\delta}\left\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|_{L_2(U\times\Omega)} \\ &\leqslant C\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{1/2-\delta}\left\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}\right\|\cdot\|E_\mu u\|_{L_2(U\times\Omega)},\end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $|H_0(\tau)|^{-1/2}$ коммутирует с $-\Delta_y + A$. Далее, по неравенству Коши-Буняковского-Шварца,

$$\begin{aligned}&\left\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\right\|^2_{L_q(U\times\Omega)} \leqslant \\ &\qquad \leqslant C\|u\|^2_{L_2(U\times\Omega)}\left(\sum_{\mu=1}^{[b]+1} + \sum_{\mu=[b]+2}^{+\infty}\right)\mu^{1-2\delta}\|E_\mu|H_0(\tau)|^{-1/2}\|^2, \qquad (4.3.7)\end{aligned}$$

где $b = |\pi b_1 + \xi'|$. В силу (4.1.3), первую сумму можно оценить через $C(b)\tau^{-1}\|u\|^2_{L_2(U\times\Omega)}$. Оценим вторую сумму. Собственные значения оператора $-\Delta_y + A$ имеют вид $\lambda_l + |n|^2$, $n \in \widetilde{\Gamma}$, $l \in \mathbb{N}$. Область значений проектора E_μ отвечает таким парам (l, n), что $(\mu-1)^2 \leqslant \lambda_l + |n|^2 < \mu^2$. Отсюда

$$|n + \pi b_1 + \xi'|^2 + \lambda_l \in [(\mu - b - 1)^2; (\mu + b)^2).$$

Следовательно, при $\mu \geqslant [b]+2$

$$\left\|E_\mu |H_0(\tau)|^{-1/2}\right\|^2 = \max_{\lambda_l+|n|^2\in[(\mu-1)^2;\mu^2)} \frac{1}{|h_{ln}(\tau)|}$$
$$\leqslant \max_{|n+\pi b_1+\xi'|^2+\lambda_l\in[(\mu-1-b)^2;(\mu+b)^2)} \frac{\sqrt{2}}{||n+\pi b_1+\xi'|^2+\lambda_l-\tau^2|+\tau}.$$

Таким образом, вторая сумма в правой части (4.3.7) не превосходит

$$C\|u\|^2_{L_2(U\times\Omega)}\times$$
$$\times \sum_{\mu=[b]+2}^{\infty} \max_{|n+\pi b_1+\xi'|^2+\lambda_l\in[(\mu-1-b)^2;(\mu+b)^2)} \frac{\mu^{1-2\delta}}{||n+\pi b_1+\xi'|^2+\lambda_l-\tau^2|+\tau}$$
$$\leqslant C(b,\delta)\tau^{-\delta}\|u\|^2_{L_2(U\times\Omega)}.$$

по лемме 3.2.1. Следовательно,

$$\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\|_{L_q(U\times\Omega)} \leqslant C\|u\|_{L_2(U\times\Omega)},$$

и оператор $H_0(\tau)$ удовлетворяет условию A(q). ∎

Глава 5

Оператор Шрёдингера в круговом цилиндре

В этой главе мы подробно изучим случай цилиндра, сечение которого — k-мерный шар. С физической точки зрения наиболее интересен случай $k = 2$, $m = 1$, поэтому многие утверждения мы снабдим явными формулами при $k = 2$. Собственные функции оператора Лапласа в шаре известны — они явно выражаются через функции Бесселя. Благодаря этому, удается доказать отсутствие собственных значений для оператора Шрёдингера с третьим краевым условием (теорема 5.3.1). Однако, поведение собственных функций оператора Лапласа в шаре сложнее, чем поведение собственных функций в прямоугольном параллелепипеде. Поэтому получить оптимальные результаты не удается, и доказательства получаемых результатов технически более тяжелые. В частности, требуются тонкие оценки расположения нулей функций Бесселя.

Мы отдельно формулируем результат (теорема 5.4.1 ниже) в частном случае $k = 2$, $m = 1$ (Ξ – обычный круговой цилиндр в $\mathbb{R}^3$), $N = 6$. Из него вытекает абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Максвелла в таком цилиндре (см. Введение). Размерность $N = 6$ соответствует тому факту, что электромагнитное поле шестимерно: три компоненты электрического поля и три — магнитного. Оператор Шрёдингера, необходимый для приложения к оператору Максвелла, отвечает квадратичной форме, обозначенной ниже h_{2+1}. Ее область определения — это пространство Соболева $H^1(\Xi, \mathbb{C}^6)$ с граничными условиями равенства нулю касательной компоненты электрического поля и нормальной компоненты магнитного поля, см. ниже (5.4.2). Для работы с такими краевыми условиями оказался удобен аппарат дифференциальных форм.

В разделе 5.1 мы приводим нужные сведения из теории дифференциальных форм в частном случае, когда многообразие — это шар в евклидовом пространстве. В разделе 5.2 описываем оператор Лапласа, действующий на p-формы. В разделе 5.3 формулируем основной результат. В разделе 5.4 описываем прикладной трехмерный случай. В разделе 5.5 исследуем нули функций Бесселя. В разделе 5.6 мы приводим выражение для собственных p-форм оператора Лапласа в k-мерном шаре, заимствованное из [19]. В разделе 5.7 мы оцениваем их следы на границе. В разделе 5.8 доказывается несколько технических лемм о символе оператора. Наконец, в последнем разделе 5.9 доказывается теорема 5.3.1.

5.1 Дифференциальные формы на k-мерном шаре

Здесь и далее $U = \{x \in \mathbb{R}^k \colon |x| \leqslant 1\}$ — единичный шар в $\mathbb{R}^k$, $\partial U = S^{k-1}$ — его граница. Через $\Lambda^p(U)$ мы будем обозначать пространство всех дифференциальных p-форм на U, $0 \leqslant p \leqslant k$. Введя декартовы координаты $x^1, \ldots, x^k$ и используя базис, состоящий из внешних произведений $dx^1, \ldots, dx^k$, можно отождествить $\Lambda^p(U)$ с функциями на U со значениями в $\mathbb{C}^{k(p)}$, где $k(p) = \binom{k}{p}$. Если $\mathcal{G}$ — функциональное пространство на U, то пространство $\mathcal{G}(\Lambda^p(U))$ форм, коэффициенты которых в этом базисе принадлежат $\mathcal{G}$, можно отождествить с $\mathcal{G}(U; \mathbb{C}^{k(p)})$.

Если M — гладкое k-мерное риманово многообразие с метрическим тензором $g^{ij}(x)$, то *оператор Ходжа* определяется как отображение

$$\star\colon \Lambda^p(M) \to \Lambda^{k-p}(M),$$

заданное на базисных элементах в локальных координатах $(x^1, \ldots, x^k)$ выражением

$$\star\,(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) =$$
$$= \frac{1}{(k-p)!} |\det g|^{1/2} \sum_{l_1, \ldots, l_{k-p}} g^{i_1 j_1}(x) \ldots g^{i_p j_p}(x) \varepsilon_{j_1 \ldots j_p l_1 \ldots l_{k-p}} dx^{l_1} \wedge \ldots \wedge dx^{l_{k-p}},$$

где ε — полностью антисимметричный тензор, такой что $\varepsilon_{123\ldots k} = 1$. В данной главе $d\colon \Lambda^p(U) \to \Lambda^{p+1}(U)$ будет обозначать внешний дифференциал, $\star$ — оператор Ходжа на U, а

$$\delta = (-1)^{k(p+1)} \star d \star\colon \Lambda^p(U) \to \Lambda^{p-1}(U) \tag{5.1.1}$$

— кодифференциал на U. Операторы d и $-\delta$ формально сопряжены. Через $\tilde{d}$, $\tilde{\star}$ будем обозначать соответственно дифференциал и оператор Ходжа на $\Lambda^p(\partial U) = \Lambda^p(S^{k-1})$, пусть также

$$\tilde{\delta} = (-1)^{(k-1)(p+1)} \tilde{\star} \tilde{d} \tilde{\star}\colon \Lambda^p(\partial U) \to \Lambda^{p-1}(\partial U).$$

В пространстве $L_2(\Lambda^p(U))$ введем скалярное произведение

$$(\varphi, \psi)_{L_2(\Lambda^p(U))} = \int\limits_U \varphi \wedge \star\bar{\psi}.$$

Оно совпадает со стандартным скалярным произведением в $L_2(U;\mathbb{C}^{k(p)})$. Аналогичным образом определяется скалярное произведение в пространстве $L_2(\Lambda^p(S^{k-1})) = L_2(\Lambda^p(\partial U))$.

Пусть $\iota\colon S^{k-1} \to U$ — стандартное вложение. Тогда определено отображение

$$\iota^*\colon \Lambda^p(U) \to \Lambda^p(\partial U).$$

Наоборот, пусть $U_0 = U \setminus \{0\}$, $\pi\colon U_0 \to \partial U$ — проекция вдоль радиуса. Тогда можно рассмотреть отображение

$$\pi^*\colon \Lambda^p(\partial U) \to \Lambda^p(U_0).$$

Таким образом, формы на ∂U можно «переносить» на U_0. Легко видеть, что при $p > 0$ любой элемент $\Lambda^p(U_0)$ однозначно представим в виде

$$\varphi = \pi^*\gamma_p(r) + dr \wedge \pi^*\gamma_{p-1}(r), \tag{5.1.2}$$

где формы $\gamma_p(r) \in \Lambda^p(S^{k-1})$, $\gamma_{p-1}(r) \in \Lambda^{p-1}(S^{k-1})$ зависят от r как от параметра. Операции над формами на шаре связаны с операциями на сфере следующими соотношениями:

$$\star\pi^*\gamma_p = (-1)^p r^{k-2p-1} dr \wedge \pi^*(\tilde{\star}\gamma_p), \tag{5.1.3}$$

$$\star(dr \wedge \pi^*\gamma_{p-1}) = r^{k-2p+1}\pi^*(\tilde{\star}\gamma_{p-1}). \tag{5.1.4}$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{r^2}\pi^*(\tilde{\delta}\gamma_p(r)) + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k-2p+1}{r}\right)\pi^*\gamma_{p-1}(r) - \frac{1}{r^2} dr \wedge \pi^*(\tilde{\delta}\gamma_{p-1}(r)) \tag{5.1.5}$$

Через $\Lambda^p\left(T^*_\omega U\right)$, $\Lambda^p\left(T^*_\omega \partial U\right)$ обозначим векторные пространства p-форм на U и ∂U соответственно в точке ω (то есть p-е внешние степени кокасательных пространств $T^*_\omega U$, $T^*_\omega \partial U$). Формула (5.1.2) дает в каждой точке $\omega \in \partial U$ ортогональное разложение

$$\Lambda^p\left(T^*_\omega U\right) \cong \Lambda^p\left(T^*_\omega \partial U\right) \oplus \Lambda^{p-1}\left(T^*_\omega \partial U\right),$$

где символом $\cong$ мы обозначаем (естественный) изоморфизм векторных пространств. С помощью базиса, введенного в начале параграфа, левая часть отождествляется с $\mathbb{C}^{k(p)}$. Таким образом, можно построить разложение

$$L_2(\partial U; \mathbb{C}^{k(p)}) \cong L_2(\Lambda^p(\partial U)) \oplus L_2(\Lambda^{p-1}(\partial U)). \tag{5.1.6}$$

В случае $p = 0$ (5.1.2) сводится к

$$\varphi = \pi^* \gamma(r),$$

где при фиксированном r $\gamma(r)$ — некоторая функция на S^{k-1}. Фактически это представление функции (0-формы) φ на U как функции на S^{k-1}, зависящей от параметра r. В этом случае

$$\delta\varphi = 0, \quad \star\varphi = \varphi\, dx = r^{k-1}\, dr \wedge (\gamma(r) d\omega)\,,$$

где $dx = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ — форма объема на U, $d\omega$ — форма объема на S^{k-1}. В разложении (5.1.6), тем самым, присутствует только первая компонента.

5.2 Оператор Лапласа в $L_2(\Lambda^p(U))$

Пусть $h \in C^\infty(U)$ — гладкая неотрицательная функция, равная 1 на ∂U и равная нулю вне некоторой окрестности ∂U. Пусть

$$N = h(x)\frac{\partial}{\partial r}$$

— векторное поле, являющееся в окрестности ∂U нормальным к границе. Определена операция подстановки $i_N \colon \Lambda^p(U) \to \Lambda^{p-1}(U)$. Пусть φ имеет вид (5.1.2). Тогда

$$i_N \varphi = \pi^* \gamma_{p-1}(r).$$

В пространстве Соболева $H^1(\Lambda^p(U))$ выделим два подпространства

$$H^1_a(\Lambda^p(U)) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\eta \in H^1(\Lambda^p(U)) \colon \iota^* i_N \eta = 0\},$$

$$H^1_r(\Lambda^p(U)) \overset{\text{def}}{=\!=} \{\eta \in H^1(\Lambda^p(U)) \colon \iota^* \eta = 0\}.$$

Соответствующие краевые условия будем называть *абсолютным* ($\iota^* i_N \eta = 0$) и *относительным* ($\iota^*\eta = 0$). В терминах представления (5.1.2) абсолютное краевое условие соответствует $\gamma_{p-1}(1) = 0$, а относительное — $\gamma_p(1)$=0.

Предложение 5.2.1. *Квадратичная форма*

$$a[\eta, \eta] = \|d\eta\|^2_{L_2(\Lambda^{p+1}(U))} + \|\delta\eta\|^2_{L_2(\Lambda^{p-1}(U))} \tag{5.2.1}$$

в $L_2(\Lambda^p(U))$*, заданная на области определения* $H^1_a(\Lambda^p(U))$ *или* $H^1_r(\Lambda^p(U))$*, замкнута и неотрицательна.*

Для случая произвольного гладкого многообразия с C^2-гладкой границей оно доказано в [56]. Отметим, что в случае $k=2$ это фактически следует из леммы 5.2.3.

Определение 5.2.2. Оператор, отвечающий форме (5.2.1) с областью определения $H_a^1(\Lambda^p(U))$ называется *оператором Лапласа на p-формах с абсолютным краевым условием* и обозначается $-\Delta_a$. Оператор, отвечающий форме (5.2.1) с областью определения $H_r^1(\Lambda^p(U))$ называется *оператором Лапласа на p-формах с относительным краевым условием* и обозначается $-\Delta_r$.

Оба оператора являются самосопряженными расширениями оператора

$$-\Delta = -(d\delta + \delta d),$$

изначально заданного на $C_0^\infty(\Lambda^p(U))$. Абсолютное краевое условие в терминах оператора имеет вид $\iota^* i_N \eta = 0$, $\iota^* i_N d\eta = 0$, а относительное — $\iota^*\eta = 0$, $\iota^*\delta\eta = 0$.

5.2.1 Примеры

В случае $p = 0$ оператор $-\Delta_a$ — это скалярный оператор Лапласа с краевым условием Неймана, а $-\Delta_r$ — с условием Дирихле.

В дальнейшем нам также будет важен пример $p = 1$, $k = 2$. Любая 1-форма на U в этом случае записывается в виде

$$\varphi = u_1(x)dx^1 + u_2(x)dx^2.$$

Ясно, что можно отождествить φ с векторным полем $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$. Ясно также, что

$$d\varphi = (\operatorname{rot} u)dx^1 \wedge dx^2, \quad \delta\varphi = \operatorname{div} u.$$

Таким образом, форму a можно переписать в виде

$$a[u,u] = \int\limits_U \left(|\operatorname{div} u|^2 + |\operatorname{rot} u|^2\right)\, dx. \tag{5.2.2}$$

В выражении (5.1.2) первое слагаемое — это тангенциальная компонента поля, а второе — нормальная. Условие $\iota^* i_N \varphi = 0$ из определения оператора $-\Delta_a$ отвечает равенству нулю нормальной компоненты поля на ∂U. В координатах оно записывается в виде

$$u_1(x)\cos\theta + u_2(x)\sin\theta = 0, \quad x = (\cos\theta, \sin\theta) \in \partial U. \tag{5.2.3}$$

Условие $\iota^*\varphi = 0$ из определения $-\Delta_r$ соответствует равенству нулю тангенциальной компоненты, то есть $\gamma_p(1) = 0$. В тех же координатах

$$u_1(x)\sin\theta - u_2(x)\cos\theta = 0, \quad x = (\cos\theta, \sin\theta) \in \partial U. \tag{5.2.4}$$

Соответственно, область определения формы (5.2.2) — это пространство $H^1_a(U;\mathbb{C}^2)$ или $H^1_r(U;\mathbb{C}^2)$, состоящие из элементов $H^1(U;\mathbb{C}^2)$ с условиями (5.2.3) или (5.2.4) соответственно.

Кроме формы (5.2.2), в приложениях может возникать форма

$$a_0[u,u] = \int\limits_U \left(\sum_{i,j=1}^{2} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \right|^2 \right) dx, \tag{5.2.5}$$

также заданная на $H^1_a(U;\mathbb{C}^2)$ или $H^1_r(U;\mathbb{C}^2)$. Связь между формами a и a_0 выражается следующей леммой.

Лемма 5.2.3. *Для $u \in H^1_a(U,\mathbb{C}^2)$ и $u \in H^1_r(U,\mathbb{C}^2)$ справедливо равенство*

$$a[u,u] - a_0[u,u] = \int\limits_{\partial U} |u(x)|^2 \, dS(x). \tag{5.2.6}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать $u \in C^2(U;\mathbb{C}^2) \cap \operatorname{Dom} a$. По определению после раскрытия скобок, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}
a[u,u] - a_0[u,u] &= 2\operatorname{Re}\int\limits_U \left(\frac{\partial \bar u_1}{\partial x^1}\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar u_1}{\partial x^2}\frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) dx \\
&= -2\operatorname{Re}\int\limits_{\partial U} \left(N_1 u_2 \frac{\partial \bar u_1}{\partial x^2} - N_2 u_2 \frac{\partial \bar u_1}{\partial x^1} \right) dS \\
= -2\operatorname{Re}\int\limits_0^{2\pi} u_2 &\left(\frac{\partial \bar u_1}{\partial x^2}\cos\theta - \frac{\partial \bar u_1}{\partial x^1}\sin\theta \right) d\theta = -2\operatorname{Re}\int\limits_0^{2\pi} u_2(\theta)\bar u_1'(\theta)\, d\theta.
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

где $(N_1(x), N_2(x)) = (\cos\theta, \sin\theta)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂U, dS — мера на ∂U, $x = (\cos\theta, \sin\theta)$, $u_i(\theta) \overset{\text{def}}{=\!=} u_i(\cos\theta, \sin\theta)$. Пусть

$$u_\tau(\theta) = -u_1(\theta)\sin\theta + u_2(\theta)\cos\theta, \quad u_n(\theta) = u_1(\theta)\cos\theta + u_2(\theta)\sin\theta.$$

Ясно, что $|u(\theta)|^2 = |u_n(\theta)|^2 + |u_\tau(\theta)|^2$. Рассмотрим случай условия (5.2.3). Тогда $u_n(\theta) = 0$, и

$$u_1(\theta) = -u_\tau(\theta)\sin\theta, \quad u_2(\theta) = u_\tau(\theta)\cos\theta, \quad |u(\theta)| = |u_\tau(\theta)|.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} u_2(\theta)\bar{u}_1'(\theta)\,d\theta = -\int_0^{2\pi} u_\tau(\theta)\cos\theta(\bar{u}_\tau(\theta)\sin\theta)'\,d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2\cos^2\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi} u_\tau(\theta)\bar{u}_\tau'(\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta.$$

Вещественная часть последнего интеграла равна

$$\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(|u(\theta)|^2\right)'\sin(2\theta)\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2\cos(2\theta)\,d\theta. \tag{5.2.8}$$

Используя равенство $2\cos^2\theta - \cos(2\theta) = 1$, получаем, что (5.2.7) преобразуется к

$$2\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} u_2(\theta)\bar{u}_1'(\theta)\,d\theta = -\int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2\ d\theta.$$

В случае условия (5.2.4), аналогично

$$u_1(\theta) = u_n(\theta)\cos\theta, \quad u_2(\theta) = u_n(\theta)\sin\theta, \quad |u(\theta)| = |u_n(\theta)|.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} u_2(\theta)\bar{u}_1'(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} u_n(\theta)\sin\theta(\bar{u}_n(\theta)\cos\theta)'\,d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2\sin^2\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} u_n(\theta)\bar{u}_n'(\theta)\sin\theta\cos\theta\,d\theta.$$

Вещественная часть последнего интеграла снова равна (5.2.8). Таким образом, поскольку $2\sin^2\theta + \cos(2\theta) = 1$, получаем

$$2\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} u_2(\theta)\bar{u}_1'(\theta)\,d\theta = -\int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2\ d\theta. \blacksquare$$

5.3 Формулировка результата

Пусть $U = \{x \in \mathbb{R}^k \colon |x| \leqslant 1\}$ — единичный шар в $\mathbb{R}^k$. Мы будем рассматривать матричный периодический оператор Шрёдингера, заданный полуторалинейной формой

$$h[u,v] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a[u(\cdot,y),v(\cdot,y)]\,dy + \int\limits_{\Xi} \langle \nabla_y u(x,y), \nabla_y v(x,y)\rangle\,dx\,dy \\ + \int\limits_{\Xi} \langle V(x,y)u(x,y), v(x,y)\rangle\,dx\,dy + \int\limits_{\Sigma} \langle \sigma(x,y)u(x,y), v(x,y)\rangle\,dS(x,y), \tag{5.3.1}$$

в цилиндре $L_2(\Xi;\mathbb{C}^{k(p)})$, где $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$. Квадратичная форма (5.3.1) определена на области

$$\operatorname{Dom} h = L_2(U; H^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}^{k(p)})) \cap L_2(\mathbb{R}^m; \operatorname{Dom} a).$$

Теорема 5.3.1. *Пусть $V \in L_{d-1}(U \times \Omega; M_{k(p)}(\mathbb{C}))$, $\sigma \in L_{4d-8}(\partial U \times \Omega; M_{k(p)}(\mathbb{C}))$. Тогда в спектре оператора Шрёдингера, заданного формой* (5.3.1)*, где форма $a[\cdot,\cdot]$ задана* (5.2.1), $\operatorname{Dom} a = H^1_a(\Lambda^p(U))$ *или* $\operatorname{Dom} a = H^1_r(\Lambda^p(U))$*, отсутствуют собственные значения. Если дополнительно V и σ самосопряжены, то его спектр абсолютно непрерывен.*

По теореме 4.1.3 для оператора H выполняется условие $\mathrm{A}\big(\frac{2d-2}{d-2}\big)$. В силу теоремы 1.2.4 достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 5.3.2. *Пусть периодический оператор Шрёдингера задан формой* (5.3.1)*, где форма $a[\cdot,\cdot]$ задана* (5.2.1), $\operatorname{Dom} a = H^1_a(\Lambda^p(U))$ *или* $\operatorname{Dom} a = H^1_r(\Lambda^p(U))$*. Тогда соответствующий оператор $H_0(\xi)$, построенный в главе 1, удовлетворяет условию $B(\frac{8d-16}{4d-9})$.*

Замечание 5.3.3. В скалярном случае ($p = 0$) условие на V можно ослабить до $V \in L_q(U \times \Omega)$, $q > \max\{d/2, d-2\}$, $d \geqslant 3$, см. теорему 4.1.4.

5.4 Трехмерный случай

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — единичный диск. Рассмотрим оператор в трехмерном цилиндре $\Xi = U \times \mathbb{R}$, действующий на вектор-функции $u = (u_a, u_r) \in$

$L_2(U \times \mathbb{R}; \mathbb{C}^6)$ и отвечающий квадратичной форме

$$h_{2+1}[u,u] = \int\limits_{\Xi} |\nabla u(x,y)|^2 \, dx \, dy + \int\limits_{\Xi} \langle V(x,y)u(x,y), u(x,y)\rangle \, dx \, dy \\ + \int\limits_{\partial\Xi} \langle \sigma(x,y)u(x,y), u(x,y)\rangle \, dS(x,y) \quad (5.4.1)$$

на пространстве

$$\operatorname{Dom} h_{2+1} = \{(u_a, u_r) \in H^1(U; \mathbb{C}^6)\colon\ u_{a,n}|_{\partial U \times \mathbb{R}} = 0,\, u_{r,\tau}|_{\partial U \times \mathbb{R}} = 0\}, \quad (5.4.2)$$

где $u_{a,n}$ — нормальная компонента, а $u_{r,\tau}$ — тангенциальная компонента трехмерных векторных полей u_a, u_r.

Теорема 5.4.1. *Пусть $V(x, y + a) = V(x, y)$, $\sigma(x, y + a) = \sigma(x, y)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, и*

$$V \in L_{2,\mathrm{loc}}(U \times \mathbb{R}; M_6(\mathbb{C})), \quad \sigma \in L_{4,\mathrm{loc}}(\partial U \times \mathbb{R}; M_6(\mathbb{C}))).$$

Тогда у периодичекого оператора Шрёдингера, отвечающего форме h_{2+1}, нет собственных значений. Если V и σ самосопряжены, то его спектр абсолютно непрерывен.

Доказательство. Пусть

$$u = (u_a, u_r) = (u_{a1}, u_a', u_{r1}, u_r'),$$

где u_{a1}, u_{r1} — одномерные компоненты полей u_a, u_r вдоль направления y, u_a', u_r' — двумерные компоненты, ортогональные y. Таким образом, имеется разложение

$$L_2(\Xi; \mathbb{C}^6) = L_2(\Xi; \mathbb{C}) \oplus L_2(\Xi; \mathbb{C}^2) \oplus L_2(\Xi; \mathbb{C}) \oplus L_2(\Xi; \mathbb{C}^2).$$

Нетрудно видеть, что это разложение порождает разложение

$$\operatorname{Dom} h_{2+1} \cong H^1(\Xi; \mathbb{C}) \oplus H^1_a(\Xi; \mathbb{C}^2) \oplus H^1_0(\Xi; \mathbb{C}) \oplus H^1_r(\Xi; \mathbb{C}^2).$$

Рассмотрим свободный оператор, заданный на той же области определения квадратичной формой

$$h_{2+1,0}[u,u] = \int\limits_{\Xi} |\nabla u(x,y)|^2 \, dx \, dy =$$

$$= \int\limits_{\Xi} \left(|\nabla u_{a1}(x,y)|^2 + |\nabla u_a'(x,y)|^2 + |\nabla u_{r1}(x,y)|^2 + |\nabla u_r'(x,y)|^2\right)\, dx\, dy.$$

Применим лемму 5.2.3 ко второму и четвертому слагаемому:

$$\begin{aligned} h_{2+1,0}[u,u] = &\int\limits_{\Xi} \left(|\nabla u_{a1}(x,y)|^2 + |\nabla u_{r1}(x,y)|^2\right)\, dx\, dy \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}} \left(a[u_a'(\cdot,y), u_a'(\cdot,y)] + a[u_r'(\cdot,y), u_r'(\cdot,y)]\right)\, dy \\ &- \int\limits_{\partial\Xi} \left(\left|u_r'(x,y)\right|^2 + \left|u_a'(x,y)\right|^2\right)\, dS(x,y), \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

где a — квадратичная форма (5.2.2), заданная на H_a^1 или H_r^1. Последнее слагаемое можно считать частью слагаемого (5.4.1), содержащего σ, и рассмотреть новый свободный оператор, отвечающий форме, образованной первыми двумя слагаемыми (5.4.3) на той же области определения. Легко видеть, что этот оператор является прямой суммой четырех операторов, удовлетворяющих условиям теоремы 5.3.1: двух скалярных операторов с условиями Дирихле и Неймана и двух операторов, действующих на 1-формы, с абсолютным и относительным краевыми условиями. Следовательно, компоненты прямой суммы (а, значит, и сам оператор) удовлетворяют условиям A(4) и B(8/3). ∎

5.5 Нули функций Бесселя

Пусть $\nu \geqslant 0$. Напомним, что функцией Бесселя (первого рода) $J_\nu(x)$ называется решение дифференциального уравнения

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0, \tag{5.5.1}$$

представимое в виде ряда Тейлора

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}, \tag{5.5.2}$$

сходящегося в окрестности нуля.

Нам понадобится ряд свойств нулей функций $J_\nu(x)$ и $\beta J_\nu(x) + x J_\nu'(x)$, где $\beta \in \mathbb{R}$. Пусть $j_{\nu,\varkappa}$, $j_{\beta,\nu,\varkappa}$ — $\varkappa$-е положительные нули функций $J_\nu(x)$ и $\beta J_\nu(x) + x J_\nu'(x)$ соответственно, $j_{\nu,\varkappa}' = j_{0,\nu,\varkappa}$ — $\varkappa$-й положительный нуль $J_\nu'(x)$. Известно (и легко проверяется), что все указанные нули являются простыми и образуют дискретное подмножество в $\mathbb{R}_+$ (то есть накапливаются только к $+\infty$). Мы будем использовать теорему Штурма:

Теорема 5.5.1. *Пусть y_i, $i = 1, 2$, — решения уравнения*

$$y'' + g_i(x)y = 0, \quad x \in (a, b).$$

Пусть g_i непрерывны на (a, b) и $g_1(x) < g_2(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Тогда между двумя последовательными нулями y_1 на (a, b) находится не менее одного нуля y_2.

Следующие две леммы представляют комбинации хорошо известных фактов, см., например, [44, §9.8] и [10, §15.23].

Лемма 5.5.2. *Справедливы следующие оценки:*

1. $j_{\nu,\varkappa+1} \geqslant j_{\nu,\varkappa} + \pi$, $\forall \varkappa \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant \frac{1}{2}$.
2. $C_1\varkappa \leqslant j_{0,\varkappa} \leqslant C_2\varkappa$ $\forall \varkappa \in \mathbb{N}$.
3. $j_{\nu,\varkappa} \leqslant 2\nu + 2\pi\varkappa$, $\forall \nu \geqslant \frac{1}{2}$, $\varkappa \in \mathbb{N}$.

Доказательство. 1. Заметим, что

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \tag{5.5.3}$$

поэтому для $\nu = 1/2$ утверждение тривиально. Пусть $\nu > 1/2$, $w(x) = \sqrt{x} J_\nu(x)$. Тогда уравнение (5.5.1) переписывается в виде

$$w''(x) + g_1(x)w(x) = 0, \quad g_1(x) = \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right). \tag{5.5.4}$$

Пусть $g_2(x) = 1$. Функция $w_0(x) = \sin(x - j_{\nu,\varkappa})$ является решением уравнения

$$w_0''(x) + g_2(x)w_0(x) = 0.$$

По теореме Штурма, поскольку $g_1(x) < g_2(x)$, между нулями $j_{\nu,\varkappa}$ и $j_{\nu,\varkappa+1}$ решения $w(x)$ должен находится нуль $w_0(x)$. Но следующий после $j_{\nu,\varkappa}$ нуль $w_0(x)$ равен $j_{\nu,\varkappa} + \pi$, откуда следует искомая оценка.

2. Хорошо известно (см. [10, §15.32]), что функция J_0 не обращается в нуль на $[0, 1]$,

$$j_{0,1} > 1. \tag{5.5.5}$$

При $x > 1$ имеем $g_1(x) < 2$. Выбирая $g_2(x) = 2$ и рассуждая аналогично пункту 1, получаем

$$j_{0,\varkappa+1} \geqslant \pi/\sqrt{2} + j_{0,\varkappa}. \tag{5.5.6}$$

Это доказывает нижнюю оценку с некоторой константой C_1. Поскольку $g_1(x) > 1$, аналогично доказывается верхняя оценка (выбором $g_2(x) = 1$).

3. Пусть $x \geqslant 2\nu$. Тогда $g_1(x) \geqslant 3/4$, где функция g_1 введена в (5.5.4). Применяя теорему Штурма к функциям $g_1(x)$ и $g_2(x) = 1/4$, получаем, что на интервале $(2\nu, 2\nu + 2\pi)$ должен лежать хотя бы один нуль $j_{\nu,\varkappa}$. Отсюда вытекает, что $j_{\nu,1} \leqslant 2\nu + 2\pi$. Точно так же показывается, что если $j_{\nu,\varkappa} > 2\nu$, то $j_{\nu,\varkappa+1} \leqslant j_{\nu,\varkappa} + 2\pi$. ∎

Лемма 5.5.3. *При $\nu \geqslant 0$, $\nu + \beta > 0$ верны оценки*

$$0 < j_{\beta,\nu,1} < j_{\nu,1}; \quad j_{\nu,\varkappa-1} < j_{\beta,\nu,\varkappa} < j_{\nu,\varkappa} \quad \text{при } \varkappa \geqslant 2. \tag{5.5.7}$$

При этом $j_{\beta,\nu,1}$ является возрастающей функцией β при $\beta \in [-\nu; \infty)$.

При $\nu + \beta = 0$ оценка заменяется на

$$j_{\nu,\varkappa} < j_{\beta,\nu,\varkappa} < j_{\nu,\varkappa+1}, \quad \varkappa \geqslant 1. \tag{5.5.8}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{\beta J_\nu(x) + x J_\nu'(x)}{J_\nu(x)}.$$

Используя уравнение (5.5.1), получаем

$$\varphi'(x) = \left(\frac{x J_\nu'(x)}{J_\nu(x)}\right)' = -\frac{(x^2 - \nu^2) J_\nu(x)^2 + x^2 J_\nu'(x)^2}{x J_\nu(x)^2}$$
$$= -\frac{2\int\limits_0^x t J_\nu(t)^2\, dt}{x J_\nu(x)^2} < 0, \quad x > 0.$$

Последнее равенство проверяется домножением на $xJ_\nu(x)^2$ и дифференцированием левой и правой частей. Таким образом, функция φ строго убывает на $(j_{\nu,\varkappa-1}, j_{\nu,\varkappa})$. Кроме того, $\varphi(j_{\nu,\varkappa-1}+0) = +\infty$, $\varphi(j_{\nu,\varkappa}-0) = -\infty$ при $\varkappa \geqslant 2$. Поэтому на промежутке $(j_{\nu,\varkappa-1}, j_{\nu,\varkappa})$ находится ровно один нуль $\varphi(x)$ и, следовательно, ровно один нуль $\beta J_\nu(x) + x J_\nu'(x)$. В силу простоты нулей $J_\nu(x)$ нули $\beta J_\nu(x) + x J_\nu'(x)$ не могут находиться в концах отрезков.

Пусть $\nu + \beta > 0$. Тогда, в силу разложения (5.5.2), $\varphi(x) > 0$ для $x \in (0, \varepsilon)$ при достаточно малом ε. Поскольку $\varphi(+0) = \nu + \beta$ и $\varphi(j_{\nu,1}-0) = -\infty$, на промежутке $(0, j_{\nu,1})$ также находится ровно один нуль $\beta J_\nu(x) + x J_\nu'(x)$. Таким образом, оценка (5.5.7) доказана. Наконец, при $0 < x < j_{\nu,1}$ функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает по β. Следовательно, то же верно и для $j_{\beta,\nu,1}$.

Если $\nu + \beta = 0$, то $\varphi(0) = 0$ и на интервале $(0; j_{\nu,1})$ $\varphi(x)$ не обращается в нуль. Рассуждение об остальных нулях сохраняет силу. Это доказывает оценку (5.5.8). ∎

Предложение 5.5.4. *При $\nu \geqslant 0$ верны следующие оценки:*

1. $\nu + C_1\nu^{1/3} \leqslant j_{\nu,1} \leqslant \nu + C_2\nu^{1/3}$.
2. $\nu + C_1'\nu^{1/3} \leqslant j_{\nu,1}' \leqslant \nu + C_2'\nu^{1/3}$.
3. $\frac{j_{\beta_1,\nu,1}}{\sqrt{\nu+\beta_1}} \geqslant \frac{j_{\beta_2,\nu,1}}{\sqrt{\nu+\beta_2}}, \quad \beta_1 < \beta_2, \quad \nu + \beta_i > 0.$
4. $j_{-\nu,\nu,\varkappa} = j_{\nu+1,\varkappa}$, $\varkappa \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пункты 1 и 2 доказаны в [27, §10.21]. Пункт 3 следует из [13, Corollary 2.1]. Пункт 4 следует из тождества

$$-\nu J_\nu(x) + xJ_\nu'(x) = -xJ_{\nu+1}(x),$$

которое проверяется непосредственно или содержится в [10, §3.2]. ∎

Лемма 5.5.5. *Пусть $\beta \geqslant -\gamma$, $\gamma \in \mathbb{Z}_+/2$, $\beta \in \mathbb{Z}/2$. Тогда справедлива оценка*

$$l + C_1 l^{1/3} + C_2\varkappa \leqslant j_{\beta,\nu,\varkappa} \leqslant C_3(l+\varkappa), \quad \nu = l+\gamma,\ l \in \mathbb{Z}_+,\ \varkappa \in \mathbb{N}. \tag{5.5.9}$$

равномерно по l и $\varkappa$ для некоторых $C_1, C_2, C_3 > 0$, зависящих от β, γ. Кроме того, оценка (5.5.9) верна для $j_{\nu,\varkappa}$.

Доказательство. Мы проведем доказательство только для $j_{\beta,\nu,\varkappa}$; в случае $j_{\nu,\varkappa}$ рассуждение только упрощается. Пусть $l \geqslant 1$. Тогда $\nu + \beta > 0$ и $\nu \geqslant 1/2$, и второе неравенство следует из пункта 3 леммы 5.5.2 и леммы 5.5.3.

Пусть $l \geqslant 1$, $\varkappa = 1$. Заметим, что для доказательства нижней оценки, в силу монотонности $j_{\beta,\nu,1}$ по β, достаточно рассмотреть случай $\beta = -\gamma$. В этом случае пункт 3 предложения 5.5.4 с $\beta_1 = -\gamma$, $\beta_2 = 0$, дает с учетом пункта 2

$$j_{\beta,\nu,1} \geqslant j_{\nu,1}'\sqrt{1-\frac{\gamma}{\nu}} \geqslant \left(l+\gamma+C(l+\gamma)^{1/3}\right)\left(1-\frac{\gamma}{l+\gamma}\right) \geqslant l + C_1 l^{1/3} + C_2.$$

Если $\varkappa \geqslant 2$, то из пункта 1 леммы 5.5.2, леммы 5.5.3 и предложения 5.5.4 следует

$$j_{\beta,l+\gamma,\varkappa} \geqslant j_{l+\gamma,\varkappa-1} \geqslant j_{l+\gamma,1} + (\varkappa-2)\pi \geqslant l+\gamma+C\left(l+\gamma\right)^{1/3} + (\varkappa-2)\pi,$$

откуда вытекает первое неравенство (5.5.9) для достаточно малых C_1, C_2.

Наконец, рассмотрим случай $l = 0$. Ясно, что при $\varkappa = 1$ и фиксированном β оценка (5.5.9) выполняется для некоторых C_2, C_3. Далее, из леммы 5.5.2 при $\varkappa \geqslant 2$ и фиксированном ν следует

$$C_4\varkappa \leqslant j_{\nu,\varkappa-1} \leqslant j_{\nu,\varkappa} \leqslant C_5\varkappa.$$

Доказательство завершается применением леммы 5.5.3. ∎

Лемма 5.5.6. [27, §10.22]. *Справедливы следующие соотношения нормировки:*

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu\left(j_{\nu,\varkappa}x\right)^2\,dx = \frac{J_\nu'(j_{\nu,\varkappa})^2}{2}; \tag{5.5.10}$$

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)^2\,dx = \left(\lambda+\beta^2-\nu^2\right)\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda})^2}{2\lambda}, \quad \lambda = j_{\beta,\nu,\varkappa}^2. \tag{5.5.11}$$

5.6 Спектр операторов $-\Delta_a$ и $-\Delta_r$

Оператор Лапласа на S^{k-1}. Напомним, что через $\tilde{d}$, $\tilde{\delta}$, $-\widetilde{\Delta} = -(\tilde{d}\tilde{\delta}+\tilde{\delta}\tilde{d})$ и $\tilde{\star}$ мы обозначаем операторы внешнего дифференцирования, кодифференцирования, Лапласа и Ходжа на сфере $\partial U = S^{k-1}$. Собственные p-формы оператора $-\widetilde{\Delta}$ бывают трех типов: замкнутые ($\tilde{d}\gamma = 0$), козамкнутые ($\tilde{\delta}\gamma = 0$) и гармоническими ($-\widetilde{\Delta}\gamma = 0$). Гармоническими являются только постоянная функция (при $p = 0$) и форма объема (при $p = k-1$). Собственные значения оператора $-\widetilde{\Delta}$ на пространстве козамкнутых p-форм имеют вид

$$\mu_{p,l} = (l+p)(l+k-p-2), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Соответствующие собственные нормированные *козамкнутые* p-формы будем обозначать через $\gamma_{p,l,i}$, где диапазон индексов i равен кратности $\mu_{p,l}$; выражение для кратности нам нигде не понадобится. Замкнутые собственные p-формы имеют вид $\tilde{\star}\gamma_{k-1-p,l,i}$ с собственными значениями $\mu_{k-p-1,l}$ (поскольку оператор Ходжа $\tilde{\star}$ переводит собственные замкнутые p-формы на сфере в козамкнутые $(k-p-1)$-формы).

Приведем явные выражения в случае $k = 2$. На окружности S^1 введем координату $\theta \in [0; 2\pi)$. 0-формы имеют вид $f(\theta)$, 1-формы — $f(\theta)d\theta$. Имеем

$$\tilde{d}(f(\theta)) = f'(\theta)d\theta, \quad \tilde{\delta}(f(\theta)d\theta) = f'(\theta), \quad \tilde{\star}(f(\theta)) = f(\theta)d\theta, \quad \tilde{\star}(f(\theta)d\theta) = f(\theta),$$

$$-\widetilde{\Delta}(f(\theta)) = -f''(\theta), \quad -\widetilde{\Delta}(f(\theta)d\theta) = -f''(\theta)d\theta$$

Собственные козамкнутые формы оператора $-\widetilde{\Delta}$ являются 0-формами (функциями) и имеют вид

$$\gamma_{0,l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm il\theta}, \quad \mu_{0,l} = l^2, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Собственные замкнутые формы имеют вид

$$\tilde{\star}(\gamma_{0,l}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm il\theta} d\theta, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Гармонические формы — это функция $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и 1-форма объема $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\theta$.

Напомним, что $j_{\beta,\nu,\varkappa}$ — $\varkappa$-й положительный нуль функции $\beta J_\nu(r) + rJ'_\nu(r)$, $j_{\nu,\varkappa}$ — $\varkappa$-й положительный нуль $J_\nu(r)$.

Теорема 5.6.1. [19, §3.4] *Собственные p-формы операторов $-\Delta_a$ и $-\Delta_r$ с положительными собственными значениями имеют вид:*

$$\varphi_p^{(1)} = \frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{\frac{k-2-2p}{2}}} \pi^* \gamma_{p,l,i}, \quad \lambda^{(1,a)} = j^2_{p-(k-2)/2,\nu,\varkappa}, \quad \lambda^{(1,r)} = j^2_{\nu,\varkappa}, \tag{5.6.1}$$

$$\varphi_p^{(2)} = d\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{\frac{k-2p}{2}}} \pi^* \gamma_{p-1,l,i}\right), \quad \lambda^{(2,a)} = j^2_{p-1-(k-2)/2,\nu,\varkappa}, \quad \lambda^{(2,r)} = j^2_{\nu,\varkappa}, \tag{5.6.2}$$

$$\varphi_p^{(3)} = \delta\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{\frac{k-2p-2}{2}}} dr \wedge \pi^* \tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}\right), \quad \lambda^{(3,a)} = j^2_{\nu,\varkappa}, \quad \lambda^{(3,r)} = j^2_{(k-2)/2-(p-1),\nu,\varkappa}, \tag{5.6.3}$$

$$\varphi_p^{(4)} = \frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{\frac{k-2p}{2}}} dr \wedge \pi^* \tilde{d}\gamma_{p-2,l,i}, \quad \lambda^{(4,a)} = j^2_{\nu,\varkappa}, \quad \lambda^{(4,r)} = j^2_{(k-2)/2-(p-2),\nu,\varkappa}, \tag{5.6.4}$$

$$\varphi_p^{(5)} = \frac{J_{\nu_5}(\sqrt{\lambda}r)}{r^{\frac{k-2-2p}{2}}} \pi^* \gamma_p, \quad p = 0 \text{ или } p = k-1,$$
$$\lambda^{(5,a)} = j^2_{p-(k-2)/2,\nu_5,\varkappa}, \quad \lambda^{(5,r)} = j^2_{\nu_5,\varkappa}, \tag{5.6.5}$$

$$\varphi_p^{(6)} = \left(\frac{J_{\nu_6}(\sqrt{\lambda}r)}{r^{\frac{k-2p}{2}}}\right)' dr \wedge \gamma_{p-1}, \quad p = 1 \text{ или } p = k,$$
$$\lambda^{(6,a)} = j^2_{p-k/2,\nu_6,\varkappa}, \quad \lambda^{(6,r)} = j^2_{\nu_6,\varkappa}. \tag{5.6.6}$$

где $\varkappa \in \mathbb{N}$,

$$\nu = l + \frac{k-2}{2},\ l \in \mathbb{N}, \quad \nu_5 = \left| p - \frac{k-2}{2} \right|, \quad \nu_6 = \left| p - \frac{k}{2} \right|,$$

$\gamma_0 = \mathrm{const}$, γ_{k-1} *— форма объема на* S^{k-1}. *Допустимые значения* λ *равны* λ^c, *где* $c \in \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{a, r\}$, *и они являются собственными значениями операторов* $-\Delta_a$ *и* $-\Delta_r$ *соответственно. Наконец, оператор* $-\Delta_a$ *при* $p = 0$ *дополнительно имеет нулевое собственное значение кратности* 1 *с собственной* 0*-формой (функцией)* $\varphi = \mathrm{const}$, *а* $-\Delta_r$ *— при* $p = k$ *с собственной* k*-формой объема* $r^{k-1} dr \wedge \gamma_{k-1}$.

Пример k = 2. В случае, когда U — двумерный диск, 0-формы являются функциями $f(r,\theta)$, 1-формы имеют вид $f(r,\theta)\,dr + g(r,\theta)\,d\theta$, а 2-формы — $f(r,\theta)\,dr \wedge d\theta$. Приведем явные выражения для операций над ними.

$$\star f(r,\theta) = r f(r,\theta) dr \wedge d\theta, \qquad df(r,\theta) = \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r}\,dr + \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta}\,d\theta,$$

$$\delta f(r,\theta) = 0, \quad -\Delta f(r,\theta) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) f(r,\theta);$$

$$\star\left(f(r,\theta)\,dr + g(r,\theta)\,d\theta\right) = -\frac{1}{r} g(r,\theta) dr + r f(r,\theta)\,d\theta,$$

$$d\left(f(r,\theta)\,dr + g(r,\theta)\,d\theta\right) = \left(\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta}\right) dr \wedge d\theta,$$

$$\delta\left(f(r,\theta)\,dr + g(r,\theta)\,d\theta\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) f(r,\theta),$$

$$\begin{aligned}
-\Delta\left(f(r,\theta)\,dr + g(r,\theta)\,d\theta\right) &= -(d\delta + \delta d)\left(f(r,\theta)\,dr + g(r,\theta)\,d\theta\right) \\
&= -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) g(r,\theta) d\theta + \frac{2}{r^3}\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial \theta}\,dr \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) f(r,\theta) dr - \frac{2}{r}\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta}\,d\theta;
\end{aligned}$$

$$\star(f(r,\theta) dr \wedge d\theta) = \frac{1}{r} f(r,\theta),$$

$$d(f(r,\theta) dr \wedge d\theta) = 0,$$

$$\delta\left(f(r,\theta) dr \wedge d\theta\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right) f(r,\theta)\,d\theta - \frac{1}{r^2}\frac{\partial f(r,\theta)}{\partial \theta}\,dr,$$

$$-\Delta\left(f(r,\theta)dr\wedge d\theta\right)=-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)f(r,\theta)\,dr\wedge d\theta.$$

Выпишем явные выражения для собственных p-форм в случае $k=2$, $p=0,1$. Отметим, что $\nu=l$.

Случай $p=0$. Собственными 0-формами будут обычные собственные функции оператора Лапласа в диске с краевыми условиями Дирихле и Неймана. В обозначениях теоремы 5.6.1 это формы типа 1 (при $l\in\mathbb{N}$) и 5 (при $l=0$). Они имеют вид

$$\varphi^{(1)}(r,\theta)=J_l(\sqrt{\lambda}r)e^{\pm il\theta},\quad \lambda^{(1,a)}=\left(j'_{l,\varkappa}\right)^2,\quad \lambda^{(1,r)}=j^2_{l,\varkappa},\quad l\in\mathbb{Z}_+.$$

Кроме того, в случае условия Неймана (абсолютного краевого условия) собственной функцией будет $\varphi=\mathrm{const}$.

Случай $p=1$. Подходят формы типа 2, 3, 5 и 6. Формы типа 2 ($l\in\mathbb{N}$) и 6 ($l=0$) имеют вид

$$\varphi^{(2)}=\sqrt{\lambda}J'_l(\sqrt{\lambda}r)e^{\pm il\theta}dr\pm ilJ_l(\sqrt{\lambda}r)e^{\pm il\theta}d\theta,$$

$$\lambda^{(2,a)}=\left(j'_{l,\varkappa}\right)^2,\quad \lambda^{(2,r)}=j^2_{l,\varkappa},\quad l\in\mathbb{Z}_+.$$

Формы типа 3 ($l\in\mathbb{N}$) и 5 ($l=0$) — это двойственные к ним по Ходжу,

$$\varphi^{(3)}=\pm il\frac{J_l(\sqrt{\lambda}r)}{r}e^{\pm il\theta}dr-\sqrt{\lambda}rJ'_l(\sqrt{\lambda}r)e^{\pm il\theta}d\theta,$$

$$\lambda^{(3,a)}=j^2_{l,\varkappa},\quad \lambda^{(3,r)}=\left(j'_{l,\varkappa}\right)^2\quad l\in\mathbb{Z}_+.$$

Соглашение о нумерации. Мы будем обозначать нормированные в $L_2(U;\mathbb{C}^{k(p)})$ собственные p-формы из теоремы 5.6.1 через $\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}$. Индекс l будет принадлежать $\mathbb{Z}_+$. При $l\in\mathbb{N}$ индекс $c\in\{1,2,3,4\}\times\{a,r\}$ будет нумеровать тип формы 1–4 и краевые условия. Удобно для форм типа 5 и 6 предполагать $l=0$. Таким образом, при $l=0$ предполагается $c\in\{0,5,6\}\times\{a,r\}$; тип 0 будет соответствовать упомянутым формам $\varphi=\mathrm{const}$ и $\varphi=Cr^{k-1}dr\wedge d\omega$ с нулевыми собственными значениями. Для всех форм, кроме типа 0, пусть $\varkappa\in\mathbb{N}$ (а для форм типа 0 предполагаем, что $\varkappa$ принимает только одно значение). Наконец, индекс i соответствует индексу i в формах $\gamma_{p,i}$.

Отметим, что не все комбинации индексов реализуются; при суммировании будем предполагать, что оно ведется только по тем комбинациям, при которых существуют соответствующие собственные формы.

5.7 Оценки следов собственных p-форм

Нас будут интересовать L_2-нормы сужений нормированных собственных форм на границу $\partial U = S^{k-1}$. Введем оператор следа

$$T\colon \Lambda^p(U) \to \Lambda^p(\partial U) \oplus \Lambda^{p-1}(\partial U), \quad T\eta = \iota^*\eta \oplus \iota^*(i_N\eta).$$

Напомним, что в (5.1.6) мы отождествили $\Lambda^p(\partial U) \oplus \Lambda^{p-1}(\partial U)$ с множеством функций на ∂U со значениями в $\mathbb{C}^{k(p)}$. В этих обозначениях T — оператор взятия следа вектор-функции на границе.

Основным результатом данного раздела является вычисление L_2-следов нормированных собственных форм на границе ∂U. Мы не смогли найти подобного результата в литературе, поэтому приводим доказательство.

Теорема 5.7.1. *Пусть $\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}$ — собственная p-форма из теоремы* 5.6.1. *Тогда*

$$\|T\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|_{L_2(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)})} \leqslant \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{\lambda - \mu_{q,l}}}\|\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|_{L_2(U;\mathbb{C}^{k(p)})},$$

где $\lambda = \lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}$ — соответствующие собственные значения из теоремы 5.6.1, *а $\mu_{q,l} = (l+q)(l+k-q-2)$, $q = p$ для форм типа* 1, *$q = p-1$ для форм типа* 2, 3, *$q = p-2$ для форм типа* 4, *и $\mu_{q,l} = 0$ для форм типа* 5, 6. *При различных l, c или i формы $T\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}$ ортогональны в $L_2(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)})$.*

Доказательство. Указанные формы имеют вид

$$\varphi_p = f_1(r)\pi^*\gamma_p + f_2(r)dr \wedge \pi^*\gamma_{p-1}.$$

Используя (5.1.3), (5.1.4), получаем

$$\begin{aligned}\|\varphi_p\|^2_{L_2(\Lambda^p(U))} &= \int\limits_U \varphi_p \wedge \star\overline{\varphi}_p \\ &= \int\limits_U \Big\{r^{k-2p-1}|f_1(r)|^2 dr \wedge \pi^*\left(\gamma_p \wedge \tilde{\star}\overline{\gamma}_p\right) \\ &\quad + r^{k-2p+1}|f_2(r)|^2 dr \wedge \pi^*\left(\gamma_{p-1} \wedge \tilde{\star}\overline{\gamma}_{p-1}\right)\Big\} \\ = \int\limits_0^1 \Big(r^{k-2p-1}|f_1(r)|^2\|\gamma_p\|^2_{L_2(\Lambda^p(\partial U))} &+ r^{k-2p+1}|f_2(r)|^2\|\gamma_{p-1}\|^2_{L_2(\Lambda^{p-1}(\partial U))}\Big)\, dr.\end{aligned} \tag{5.7.1}$$

Абсолютные краевые условия. Для формы (5.6.1) в силу (5.7.1) и леммы 5.5.6

$$\|\varphi_p^{(1)}\|^2_{L_2(\Lambda^p(U))} = \int\limits_0^1 rJ_\nu(\sqrt{\lambda}r)^2\,dr = (\lambda-\mu_{p,l})\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda})^2}{2\lambda}.$$

Соответственно,

$$\frac{T\varphi_p^{(1)}}{\|\varphi_p^{(1)}\|_{L_2(\Lambda^p(U))}} = \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{\lambda-\mu_{p,l}}}\,\gamma_{p,l,i};0\right).$$

Вычислим нормировку формы (5.6.2). Имеем

$$\|\varphi_p^{(2)}\|^2_{L_2(\Lambda^p(U))} = \left(d\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\pi^*\gamma_{p-1,l,i}\right), d\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\pi^*\gamma_{p-1,l,i}\right)\right)_{L_2(\Lambda^p(U))} =$$

$$= \left(-\Delta\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\pi^*\gamma_{p-1,l,i}\right), \frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\pi^*\gamma_{p-1,l,i}\right)_{L_2(\Lambda^{p-1}(U))} =$$

$$= \lambda\left\|\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\pi^*\gamma_{p-1,l,i}\right\|^2_{L_2(\Lambda^{p-1}(U))} = \lambda\int\limits_0^1 rJ_\nu(\sqrt{\lambda}r)^2\,dr$$

$$= (\lambda-\mu_{p-1,l})\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda})^2}{2}.$$

Вычислим след нормированной формы $\varphi_p^{(2)}$ на границе. Для этого запишем

$$\varphi_p^{(2)} = \frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\,\pi^*\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i} + \left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\right)'dr\wedge\pi^*\gamma_{p-1,l,i}. \tag{5.7.2}$$

Второе слагаемое при $r=1$ равно нулю в силу краевого условия. Теперь используем

$$\|\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}\|^2_{L_2(\Lambda^p(\partial U))} = (-\widetilde{\Delta}\gamma_{p-1,l,i},\gamma_{p-1,l,i})_{L_2(\Lambda^{p-1}(\partial U))} = \mu_{p-1,l} \tag{5.7.3}$$

и, в итоге, получаем

$$\frac{T\varphi_p^{(2)}}{\|\varphi_p^{(2)}\|_{L_2(\Lambda^p(U))}} = \left(\frac{\sqrt{2\mu_{p-1,l}}}{\sqrt{\lambda-\mu_{p-1,l}}}\frac{\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}}{\sqrt{\mu_{p-1,l}}};0\right).$$

Утверждение теоремы для формы $\varphi_p^{(2)}$ следует из (5.7.3).

Формы (5.6.3), (5.6.4) и (5.6.6) с абсолютными краевыми условиями равны нулю на границе. Наконец, для формы (5.6.5) при $p = 0$ или $p = k-1$

$$T\varphi_p^{(5)} = (J_{\nu_5}(\sqrt{\lambda})\gamma_p; 0),$$

$$\|\varphi_p^{(5)}\|^2_{L_2(\Lambda^p(U))} = \int\limits_0^1 r J_{\nu_5}(\sqrt{\lambda} r)^2\, dr = \frac{J_{\nu_5}(\sqrt{\lambda})^2}{2}$$

в силу (5.5.11), откуда сразу же следует утверждение теоремы.

Относительные краевые условия. Формы типа (5.6.1) равны нулю на границе. Для форм типа (5.6.2), используя (5.5.10), можно провести вычисление, аналогичное случаю абсолютного краевого условия:

$$\begin{gathered}\|\varphi_p^{(2)}\|^2_{L_2(\Lambda^p(U))} = \\ = \left(d\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\pi^*\gamma_{p-1,l,i}\right), d\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\pi^*\gamma_{p-1,l,i}\right)\right)_{L_2(\Lambda^p(U))} = \frac{\lambda J'_\nu(\sqrt{\lambda})^2}{2}.\end{gathered} \tag{5.7.4}$$

Вычислим $T\varphi_p^{(2)}$, используя (5.7.2). Заметим, что в силу краевого условия $\iota^*\varphi_p^{(2)} = 0$. Пусть N — векторное поле на U, являющееся в окрестности ∂U единичным векторным полем, нормальным к границе. Ясно, что

$$\iota^*\left(i_N\varphi_p^{(2)}\right) = \left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p}}\right)'\Bigg|_{r=1}\gamma_{p-1,l,i} = J'_\nu(\sqrt{\lambda})\gamma_{p-1,l,i}, \tag{5.7.5}$$

так как $J_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0$. Следовательно, из (5.7.4), (5.7.5) вытекает

$$\frac{T\varphi_p^{(2)}}{\|\varphi_p^{(2)}\|_{L_2(\Lambda^p(U))}} = \left(0; \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\gamma_{p-1,l,i}\right).$$

Для форм типа 2 имеем $\lambda = j^2_{\nu,\varkappa} > \nu^2 \geqslant 1$ (в силу п. 1 предложения 5.5.4). Таким образом,

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \leqslant \sqrt{2} \leqslant \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda - \mu_{q,l}}},$$

откуда следует утверждение теоремы.

Вычислим нормировку формы (5.6.3), используя (5.5.11), (5.7.1) и (5.7.3):

$$\|\varphi_p^{(3)}\|^2_{L_2(\Lambda^p(U))} =$$
$$= \left(\delta\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p-1}}dr\wedge\pi^*\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}\right), \delta\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p-1}}dr\wedge\pi^*\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}\right)\right)_{L_2(\Lambda^p(U))} =$$
$$= \left(-\Delta\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p-1}}dr\wedge\pi^*\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}\right), \frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p-1}}dr\wedge\pi^*\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}\right)_{L_2(\Lambda^{p+1}(U))}$$
$$= \lambda\left\|\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p-1}}dr\wedge\pi^*\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}\right\|^2_{L_2(\Lambda^{p+1}(U))}$$
$$= \lambda\int\limits_0^1 rJ_\nu(\sqrt{\lambda}r)^2\,dr\|\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}\|^2_{L_2(\Lambda^p(\partial U))} = (\lambda-\mu_{p-1,l})\mu_{p-1,l}\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda})^2}{2}.$$

Далее, вычислим

$$\delta\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p-1}}dr\wedge\pi^*\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{k-2p-1}{r}\right)\left(\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p-1}}\right)\pi^*\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i} - dr\wedge\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^{k/2-p+1}}\pi^*\tilde{\delta}\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i}.$$

Первое слагаемое равно 0 при $r=1$ в силу краевого условия. Заметим, что

$$\tilde{\delta}\tilde{d}\gamma_{p-1,l,i} = -\widetilde{\Delta}\gamma_{p-1,l,i} = \mu_{p-1,l}\gamma_{p-1,l,i},$$

откуда

$$\frac{T\varphi_p^{(3)}}{\|\varphi_p^{(3)}\|_{L_2(\Lambda^p(U))}} = \left(0; -\frac{\sqrt{2\mu_{p-1,l}}}{\sqrt{\lambda-\mu_{p-1,l}}}\gamma_{p-1,l,i}\right).$$

Перейдем к форме (5.6.4). Тем же способом получаем

$$\|\varphi_p^{(4)}\|^2_{L_2(\Lambda^p(U))} = (\lambda-\mu_{p-2,l})\mu_{p-2,l}\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda})^2}{2\lambda},$$

откуда

$$\frac{T\varphi_p^{(4)}}{\|\varphi_p^{(4)}\|_{L_2(\Lambda^p(U))}} = \left(0; \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{\lambda-\mu_{p-2,l}}}\frac{\tilde{d}\gamma_{p-2,l,i}}{\sqrt{\mu_{p-2,l}}}\right).$$

Форма $\frac{\tilde{d}\gamma_{p-2,l,i}}{\sqrt{\mu_{p-2,l}}}$ — некоторая L_2-нормированная замкнутая собственная $(p-1)$-форма оператора $-\widetilde{\Delta}$ на сфере с собственным значением $\mu_{p-2,l}$.

Наконец, $T\varphi_p^{(5)} = 0$, а

$$\frac{T\varphi_p^{(6)}}{\|\varphi_p^{(6)}\|_{L_2(\Lambda^p(U))}} = \left(0; \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\gamma_{p-1}\right), \quad \text{где } p = 1 \text{ или } p = k$$

аналогично случаю форм типа 2; форма типа 6 имеет вид второго слагаемого в формуле (5.7.2). Далее, $\lambda = j^2_{\nu_6,\varkappa} \geqslant 1$ (см. п. 1 предложения 5.5.4, а также формулы (5.5.5), (5.5.3)) и, следовательно, $\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \leqslant \sqrt{2}$.

Ортогональность следов форм следует из ортогональности соответствующих собственных форм на сфере и разложения $L_2(\partial U; \mathbb{C}^{k(p)}) \cong L_2(\Lambda^p(\partial U)) \oplus L_2(\Lambda^{p-1}(\partial U))$. ∎

Следствие 5.7.2. *В условиях теоремы* 5.7.1

$$\|T\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|^2_{L_2(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)})} \leqslant \frac{C\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - l}\|\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|^2_{L_2(U;\mathbb{C}^{k(p)})}.$$

Постоянная C может зависеть от k, p и от типа формы, но не от l, $\varkappa$.

Доказательство. Из теоремы 5.7.1 вытекает

$$\|T\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|^2_{L_2(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)})} \leqslant \frac{2\lambda}{\lambda - \mu_{q,l}}\|\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|^2_{L_2(U;\mathbb{C}^{k(p)})}.$$

При $\mu_{q,l} = 0$ утверждение очевидно. В остальных случаях

$$\sqrt{\mu_{q,l}} = \sqrt{(l+q)(l+k-q-2)} = l + O(1). \tag{5.7.6}$$

Кроме того, поскольку $\lambda = j^2_{\nu,\varkappa}$ или $\lambda = j^2_{\beta,\nu,\varkappa}$, по лемме 5.5.5

$$\sqrt{\lambda} \geqslant l + C_1 l^{1/3} + C_2\varkappa. \tag{5.7.7}$$

Докажем, что справедлива оценка

$$(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu_{q,l}})(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu_{q,l}}) \geqslant C\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda} - l).$$

Действительно, она напрямую вытекает из (5.7.7), (5.7.6) при достаточно больших l или достаточно больших $\varkappa$. Множество всех остальных $(l, \varkappa)$ конечно и зависит только от k, q и от типа формы. Поскольку левая и правая части положительны, для этих l, $\varkappa$ также справедлива указанная оценка с некоторой константой C. ∎

5.8 Леммы

Лемма 5.8.1. *Пусть* $\tau > 1$, $h > 1$, $l \geqslant 0$, $a \geqslant 0$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{|a^2 + (l+s)^2 - \tau^2| + \tau h} \leqslant C(\tau h)^{-1/2}.$$

Доказательство. Заметим, что интеграл убывает с ростом l, так что положим $l = 0$. Пусть $a \geqslant \tau$. Тогда интеграл не превосходит

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \tau h} = \frac{\pi}{2\sqrt{\tau h}}.$$

Рассмотрим случай $a < \tau$. Пусть $b = \sqrt{\tau^2 - a^2}$. Если $s \geqslant 2b$, то интеграл оценивается аналогично предыдущему случаю. Поэтому осталось оценить

$$\int\limits_0^{2b} \frac{ds}{|s^2 - b^2| + \tau h} \leqslant \frac{1}{b} \int\limits_0^{2b} \frac{ds}{|s - b| + \tau h/b} = \frac{2}{b} \int\limits_0^{b} \frac{ds}{b - s + \tau h/b} =$$

$$= \frac{2}{b} \ln\left(1 + \frac{b^2}{\tau h}\right) = \frac{2}{\sqrt{\tau h}} \left(\frac{b^2}{\tau h}\right)^{-1/2} \ln\left(1 + \frac{b^2}{\tau h}\right) \leqslant C(\tau h)^{-1/2},$$

так как функция $t^{-1/2}\ln(1+t)$ ограничена для $t > 0$. ∎

Лемма 5.8.2. *Пусть* $l \geqslant 0$, $\beta \geqslant 1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(s+l)\,ds}{(s + l^{1/3})((s+l)^2 + \beta^2)} \leqslant \frac{C\ln(l^2 + \beta^2)}{(l^2 + \beta^2)^{1/2}}.$$

Доказательство. Пусть $0 \leqslant l < 2$. Тогда интеграл оценивается через

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{ds}{s^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2\beta}.$$

Пусть $l \geqslant 2$, $l' = l - l^{1/3} \geqslant l/3$. Перепишем интеграл в виде

$$\int\limits_{l^{1/3}}^{+\infty} \frac{(s+l')\,ds}{s((s+l')^2 + \beta^2)} = l' \int\limits_{l^{1/3}}^{+\infty} \frac{ds}{s((s+l')^2 + \beta^2)} + \int\limits_{l^{1/3}}^{+\infty} \frac{ds}{(s+l')^2 + \beta^2}.$$

Второе слагаемое не превосходит

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + l'^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2\left(l'^2 + \beta^2\right)^{1/2}}.$$

Оценим первое слагаемое:

$$l' \int\limits_{l^{1/3}}^{+\infty} \frac{ds}{s((s+l')^2 + \beta^2)} = \frac{l'}{l'^2 + \beta^2} \int\limits_{l^{1/3}}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s + 2l'}{(s+l')^2 + \beta^2} \right\} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l'}{l'^2 + \beta^2} \int\limits_{l^{1/3}}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s + l'}{(s+l')^2 + \beta^2} \right\} ds$$

$$\leqslant \frac{l'}{2(l'^2 + \beta^2)} \ln\left(\frac{l^2 + \beta^2}{l^{2/3}} \right) \leqslant C \frac{\ln(l^2 + \beta^2)}{(l^2 + \beta^2)^{1/2}}. \blacksquare$$

Лемма 5.8.3. *Пусть* $0 < l \leqslant b$, $\tau > 0$. *Тогда*

$$\frac{l}{b} \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{(s + l^{1/3})(s + \tau/b)} \leqslant C\tau^{-1/4}, \tag{5.8.1}$$

$$\frac{l}{b} \int\limits_0^{b-l} \frac{ds}{(s + l^{1/3})(b - l - s + \tau/b)} \leqslant C\tau^{-1/4}. \tag{5.8.2}$$

Доказательство. По неравенству Юнга

$$4s^{1/4}l^{1/4} \leqslant s + 3l^{1/3}, \tag{5.8.3}$$

откуда левая часть (5.8.1) не превосходит

$$\frac{l^{3/4}}{b} \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{1/4}(s + \tau/b)} = \frac{l^{3/4}}{b} \frac{b^{1/4}}{\tau^{1/4}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{s^{1/4}(s+1)} \leqslant C\tau^{-1/4}.$$

Докажем (5.8.2). Снова воспользуемся (5.8.3) и аналогичным неравенством

$$3(b - l - s) + \tau/b \geqslant 4(b - l - s)^{3/4}(\tau/b)^{1/4}.$$

Таким образом,

$$\frac{l}{b}\int\limits_0^{b-l}\frac{ds}{(s+l^{1/3})(b-l+\tau/b-s)}\leqslant\frac{lb^{1/4}}{bl^{1/4}\tau^{1/4}}\int\limits_0^{b-l}\frac{ds}{s^{1/4}(b-l-s)^{3/4}}=$$

$$=\tau^{-1/4}\left(\frac{l}{b}\right)^{3/4}\int\limits_0^1\frac{ds}{s^{1/4}(1-s)^{3/4}}\leqslant C\tau^{-1/4}.\blacksquare$$

Лемма 5.8.4. *Пусть* $\tau\geqslant 1$, $h\geqslant 1$, $l\geqslant 0$, $a\geqslant 0$. *Тогда*

$$\frac{\ln(l^2+|a^2-\tau^2|+\tau h)}{(l^2+|a^2-\tau^2|+\tau h)^{1/2}}\leqslant C\min\{\tau^{-1/8},h^{-1/4}\left(l^2+a^2\right)^{-1/8}\}.$$

Доказательство. Очевидно, что левая часть не превосходит

$$\frac{\ln(l^2+|a^2-\tau^2|+\tau h)}{\tau^{1/8}(l^2+|a^2-\tau^2|+\tau h)^{3/8}}\leqslant\frac{C}{\tau^{1/8}}.$$

Предположим, что $a\geqslant\tau$ и рассмотрим случай $l^2+a^2\geqslant 2\tau^2$. Тогда

$$\frac{\ln(l^2+a^2-\tau^2+\tau h)}{(l^2+a^2-\tau^2+\tau h)^{1/2}}\leqslant\frac{C\ln(l^2+a^2+\tau h)}{h^{1/4}(l^2+a^2+\tau h)^{1/4}}$$
$$\leqslant\frac{C\ln(l^2+a^2+\tau h)}{h^{1/4}(l^2+a^2)^{1/8}(l^2+a^2+\tau h)^{1/8}}\leqslant\frac{C'}{h^{1/4}\left(l^2+a^2\right)^{1/8}}.$$

Пусть теперь $l^2+a^2\leqslant 2\tau^2$. Тогда числитель не превосходит $\ln(\tau^2+\tau h)\leqslant 2\ln(1+\tau h)$. Следовательно, левая часть оценивается через

$$\frac{2\ln(1+\tau h)}{h^{1/4}\tau^{1/4}(\tau h)^{1/4}}\leqslant\frac{2^{1/8}}{h^{1/4}(l^2+a^2)^{1/8}}\frac{2\ln(1+\tau h)}{(\tau h)^{1/4}}\leqslant\frac{C}{h^{1/4}\left(l^2+a^2\right)^{1/8}}.\qquad(5.8.4)$$

Пусть теперь $a\leqslant\tau$, $l^2+\tau^2\geqslant 2a^2$. Аналогично предыдущему, получаем оценку

$$\frac{\ln(l^2+\tau^2-a^2+\tau h)}{(l^2+\tau^2-a^2+\tau h)^{1/2}}\leqslant\frac{C\ln(l^2+\tau^2+\tau h)}{h^{1/4}(l^2+\tau^2+\tau h)^{1/4}}$$
$$\leqslant\frac{C\ln(l^2+\tau^2+\tau h)}{h^{1/4}(l^2+\tau^2)^{1/8}(l^2+\tau^2+\tau h)^{1/8}}\leqslant\frac{C'}{h^{1/4}\left(l^2+a^2\right)^{1/8}},$$

поскольку $a\leqslant\tau$. В случае $l^2+\tau^2\leqslant 2a^2$ числитель не превосходит $\ln(a^2+\tau h)\leqslant 2\ln(1+\tau h)$ (снова поскольку $a\leqslant\tau$), а дальше оценка повторяет (5.8.4). ∎

Лемма 5.8.5. *Пусть $\tau \geqslant 1$, $h \geqslant 1$; $l \geqslant 0$, $a \geqslant 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(l+s)\,ds}{(l^{1/3}+s)(|a^2+(l+s)^2-\tau^2|+\tau h)} \leqslant C\min\{\tau^{-1/8}, h^{-1/4}\left(l^2+a^2\right)^{-1/8}\}. \tag{5.8.5}$$

Доказательство. Пусть $a \geqslant \tau$. Применим лемму 5.8.2:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(s+l)\,ds}{(s+l^{1/3})((s+l)^2+a^2-\tau^2+\tau h)} \leqslant \frac{C\ln(l^2+a^2-\tau^2+\tau h)}{(l^2+a^2-\tau^2+\tau h)^{1/2}}.$$

Далее утверждение следует из леммы 5.8.4.

Пусть $a < \tau$. Положим $b = \sqrt{\tau^2-a^2}$. Рассмотрим вначале случай $l \geqslant 2b$. По лемме 5.8.2

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{(s+l)\,ds}{(s+l^{1/3})((s+l)^2-b^2+\tau h)} \leqslant 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{(s+l)\,ds}{(s+l^{1/3})((s+l)^2+b^2+\tau h)} \leqslant C\frac{\ln(l^2+\tau^2-a^2+\tau h)}{(l^2+\tau^2-a^2+\tau h)^{1/2}},$$

и утверждение снова следует из леммы 5.8.4.

Пусть теперь $l \leqslant 2b$. Интеграл по промежутку $[2b-l;+\infty)$ оценивается аналогично. Рассмотрим интеграл по промежутку $[0;2b-l]$. Данный промежуток непуст только в случае $l^2+a^2 \leqslant 4\tau^2$, так что достаточно оценить левую часть (5.8.5) через $(\tau h)^{-1/4}$. По лемме 5.8.1 можно заменить $l+s$ в числителе на l. Итого, задача свелась к оценке интеграла

$$l\int\limits_0^{2b-l} \frac{ds}{(l^{1/3}+s)(|(l+s)^2-b^2|+\tau h)} \leqslant \frac{l}{b}\int\limits_0^{2b-l} \frac{ds}{(l^{1/3}+s)(|l+s-b|+\tau h/b)}.$$

Предположим, что $b < l \leqslant 2b$. Тогда оценка интеграла сводится к

$$\int\limits_0^{2b-l} \frac{ds}{(s+l^{1/3})(s+l-b+\tau h/b)} \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+l^{1/3})(s+\tau h/b)} \leqslant C(\tau h)^{-1/4}$$

по лемме 5.8.3.

Осталось рассмотреть случай $0 < l \leqslant b$. Интеграл разбивается на два: по промежуткам $[0; b-l]$ и $[b-l; 2b-l]$. Оценка первого сразу же следует из (5.8.2). Рассмотрим второй,

$$\frac{l}{b}\int\limits_{b-l}^{2b-l} \frac{ds}{(s+l^{1/3})(s+l-b+\tau h/b)} =$$

$$= \frac{l}{b}\int\limits_{0}^{b} \frac{ds}{(s+b-l+l^{1/3})(s+\tau h/b)} \leqslant C(\tau h)^{-1/4}$$

в силу (5.8.1). ∎

Лемма 5.8.6. *Пусть* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *— непрерывная функция, имеющая* K *промежутков монотонности, пусть* $f(x) \leqslant M$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$. *Пусть*

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad a_{i+1} \geqslant a_i + b, \quad b > 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{+\infty} f(a_i) \leqslant C(K,b)\left(M + \int\limits_{a_0}^{+\infty} f(s)\,ds\right).$$

Доказательство. С помощью замены переменной и сдвига задача сводится к $a_0 = 0$, $b = 1$. Разобьем вещественную ось на отрезки $[n; n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, и рассмотрим только те a_i, для которых f монотонна на отрезке, содержащем a_i. Сумма всех остальных $f(a_i)$ оценивается через $M(K-1)$, поэтому это не умаляет общности. Далее, для $a_i \in [n; n+1)$ заменим a_i на n, если $f(n) \geqslant f(a_i)$, и на $n+1$ в противном случае; сумма в левой части от этого может только увеличиться. Ясно, что после этой процедуры каждая целая точка может встретиться среди a_i не более двух раз. Поэтому далее можно предполагать $a_i \in \mathbb{Z}$.

Заменим интеграл на нижнюю сумму Дарбу для отрезков $[n; n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что если функция f монотонна на отрезке $[n-1; n+1]$ для $n \in \mathbb{Z}_+$, то в сумму Дарбу войдет $f(n)$. Количество точек, не удовлетворяющих этому свойству, не превосходит $2K-1$, так что сумма Дарбу отличается от суммы в левой части не более, чем на $(2K-1)M$. ∎

Сформулируем основную лемму данного параграфа, которая в дальнейшем будет применяться для оценки символа оператора $H_0(\tau)$.

Лемма 5.8.7. *При любом фиксированном $k \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{j_{\beta,\nu,\varkappa}}{(j_{\beta,\nu,\varkappa} - l)\left(\left|a^2 - \tau^2 + j_{\beta,\nu,\varkappa}^2\right| + \tau h\right)} \leqslant C \min\{\tau^{-1/8}, h^{-1/4}\left(l^2 + a^2\right)^{-1/8}\}, \tag{5.8.6}$$

равномерно по $l \in \mathbb{Z}_+$, $a \geqslant 0$, $h \geqslant 1$, где $\nu = l + \frac{k-2}{2}$, $\nu = \nu_5$ или $\nu = \nu_6$, значения β берутся из теоремы 5.6.1 (*с учетом соглашения о нумерации*). *То же верно, если заменить $j_{\beta,\nu,\varkappa}$ на $j_{\nu,\varkappa}$.*

Доказательство. Из формулировки следует, что $\beta + \nu \geqslant 0$. По лемме 5.5.3, $j_{\beta,\nu,\varkappa}$ лежит между нулями функции Бесселя $j_{\nu,\varkappa-1}$ и $j_{\nu,\varkappa}$, расстояние между которыми по лемме 5.5.2 не меньше π при $\nu \geqslant \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$j_{\beta,\nu,\varkappa+2} - j_{\beta,\nu,\varkappa} \geqslant \pi, \quad \varkappa > 0.$$

При $\nu = 0$ расстояние между соседними нулями также оценивается некоторой константой, см. (5.5.6). Таким образом (возможно, разбив сумму на сумму по четным и нечетным $\varkappa$), можно считать, что расстояние между соседними нулями ограничено снизу некоторой константой. В силу нижней оценки из леммы 5.5.5, для достаточно малой $C > 0$ (зависящей только от k), сумму можно переписать в виде

$$\sum_{s \in S(l)} \frac{l + Cl^{1/3} + s}{(Cl^{1/3} + s)\left(|a^2 - \tau^2 + (l + Cl^{1/3} + s)^2| + \tau h\right)},$$

где

$$S(l) = \{s > 0 \mid \exists \varkappa \in \mathbb{N} \colon l + Cl^{1/3} + s = j_{\beta,\nu,\varkappa}\}.$$

Расстояние между элементами $S(l)$ также оценивается снизу равномерно по l некоторой константой. В силу леммы 5.8.6, оценка сведется к оценке интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{(l + Cl^{1/3} + s)\, ds}{(Cl^{1/3} + s)\left(|a^2 - \tau^2 + (l + Cl^{1/3} + s)^2| + \tau h\right)},$$

если мы проверим ограниченность подынтегрального выражения (это будет проделано в конце доказательства). Положим $l' = l + Cl^{1/3}$. Ясно, что $l \leqslant l' \leqslant (C+1)l$, так как $l \in \mathbb{Z}_+$. Таким образом, оценка интеграла свелась к оценке

$$\int_0^{+\infty} \frac{(s + l')\, ds}{(s + l'^{1/3})\left\{|(s + l')^2 + a^2 - \tau^2| + \tau h\right\}} \leqslant$$

$$\leqslant C \min\{\tau^{-1/8}, h^{-1/4}\left(l'^2 + a^2\right)^{-1/8}\}, \quad \tau > 1,$$

в силу леммы 5.8.5.

Наконец, равномерная ограниченность подынтегрального выражения при

$$\tau^2 \geqslant \frac{1}{2}\left((s+l')^2 + a^2\right)$$

получается, если в знаменателе оставить только последнее слагаемое в фигурных скобках; при остальных τ можно заменить первое слагаемое на $\frac{1}{2}\left((s+l')^2 + a^2\right)$. ■

5.9 Доказательство теоремы 5.3.2

Рассмотрим оператор $H_0(\tau)$, введенный в главе 1. Его собственные функции являются произведениями собственных p-форм оператора $-\Delta_a$ или $-\Delta_r$ и собственных функций оператора Лапласа на Ω с периодическими краевыми условиями,

$$|\Omega|^{-1/2} e^{iny} \varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}, \quad n \in \Gamma'; \quad l \in \mathbb{Z}_+, \varkappa \in \mathbb{N},$$

в базисе из которых оператор $H_0(\tau)$ является оператором умножения на символ

$$h^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}(\tau) = |n + \pi b_1 + \xi|^2 - \tau^2 + \lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa} + 2i\tau\langle n + \pi b_1, b_1\rangle,$$

где $c \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\} \times \{a, r\}$ перечисляет возможные типы форм из теоремы 5.6.1; мы используем соглашение о нумерации из §5.6. Заметим, что

$$|h^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}(\tau)| \geqslant 2\tau|\langle n, b_1\rangle + \pi| \geqslant \pi\tau(|n_1| + 1), \text{ так как } \langle n, b_1\rangle = 2\pi n_1 \in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{5.9.1}$$

Введем оператор $|H_0(\tau)|^{-1/2}$ с теми же собственными функциями и символом $|h^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}(\tau)|^{-1/2}$.

Лемма 5.9.1. *Пусть $u \in L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^{k(p)})$. Тогда след элемента $|H_0(\tau)|^{-1/2}u$ на границе $\partial U \times \Omega$ корректно определен и для некоторого $\tau_0 > 0$*

$$\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\|_{L_2(\partial U \times \Omega; \mathbb{C}^{k(p)})} \leqslant C\tau^{-1/16}\|u\|_{L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^{k(p)})}, \quad \tau \geqslant \tau_0. \tag{5.9.2}$$

Доказательство. Представим u в виде

$$u = \sum_{l,i,\varkappa,n,c} u^{(c)}_{l,i,\varkappa,n} |\Omega|^{-1/2} e^{iny} \varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}.$$

Далее,

$$\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\|^2_{L_2(\partial U\times\Omega)} =$$
$$= \left\| \sum_{l,i,\varkappa,n,c} |h^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}(\tau)|^{-1/2} u^{(c)}_{l,i,\varkappa,n} |\Omega|^{-1/2} e^{iny} \varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa} \right\|^2_{L_2(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})}. \quad (5.9.3)$$

Из теоремы 5.7.1 следует, что элементы $e^{iny}\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}$ ортогональны в $L_2(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})$ при различных l, i, n или c. Поэтому суммирования по этим переменным можно вынести за знак нормы. После этого применим неравенство Коши-Буняковского, теорему 5.7.1 и следствие 5.7.2:

$$\left\| \sum_{l,i,\varkappa,n,c} |h^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}(\tau)|^{-1/2} u^{(c)}_{l,i,\varkappa,n} |\Omega|^{-1/2} e^{iny} \varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa} \right\|^2_{L_2(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})}$$
$$= \sum_{l,i,n,c} \left\| \sum_{\varkappa} |h^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}(\tau)|^{-1/2} u^{(c)}_{l,i,\varkappa,n} |\Omega|^{-1/2} e^{iny} \varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa} \right\|^2_{L_2(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})}$$
$$\leqslant \sum_{l,i,n,c} \left\{ \sum_{\varkappa} \frac{\|\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|^2_{L_2(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)})}}{|h^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}(\tau)|} \right\} \sum_{\varkappa} |u^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}|^2$$
$$\leqslant \sup_{n,l,i,c} \left\{ \sum_{\varkappa} \frac{\|\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|^2_{L_2(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)})}}{|h^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}(\tau)|} \right\} \|u\|^2_{L_2(U\times\Omega)}$$
$$\leqslant \sup_{n,l,i,c} \left\{ \sum_{\varkappa} \frac{C\sqrt{\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}}}{|h^{(c)}_{l,i,\varkappa,n}(\tau)| \left(\sqrt{\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}} - l\right)} \right\} \|u\|^2_{L_2(U\times\Omega)}. \quad (5.9.4)$$

Задача сводится к получению равномерной по n и l оценки (не зависящей от i) суммы в фигурных скобках, то есть

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}}}{\left(\sqrt{\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}} - l\right)\left(\left||n+\pi b_1+\xi|^2 - \tau^2 + \lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}\right| + 2|\tau\langle n+\pi b_1, b_1\rangle|\right)} \leqslant C\tau^{-1/8}, \quad (5.9.5)$$

где $\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa} = j^2_{\beta,\nu,\varkappa}$ или $\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa} = j^2_{\nu,\varkappa}$, $\nu = l + \frac{k-2}{2}$, $\nu = \nu_5$ или $\nu = \nu_6$, а значения β берутся из теоремы 5.6.1. Эта оценка следует из леммы 5.8.7 с $a = |n+\pi b_1+\xi|$, $h = \pi(|n_1|+1)$. ∎

Используя разложение (5.1.6), в пространстве Соболева $H^s(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)}) = H^s(S^{k-1};\mathbb{C}^{k(p)})$ естественным образом вводится норма

$$|||u|||^2_{H^s(S^{k-1};\mathbb{C}^{k(p)})} = \|u\|^2_{L_2(S^{k-1};\mathbb{C}^{k(p)})} + \Big((-\widetilde{\Delta})^s u_p, u_p\Big) + \Big((-\widetilde{\Delta})^s u_{p-1}, u_{p-1}\Big)$$
$$= \|u\|^2_{L_2(S^{k-1};\mathbb{C}^{k(p)})} +$$
$$+ \sum_{l,i} \left\{\mu^s_{p,l}|u_{p,l,i}|^2 + \mu^s_{p-1,l}|u_{p-1,l,i}|^2 + \mu^s_{k-1-p,l}|u^\star_{p,l,i}|^2 + \mu^s_{k-p,l}|u^\star_{p-1,l,i}|^2\right\},$$

где $\mu_{q,l}$ введены в разделе 5.6, а

$$u = (u_p, u_{p-1}), \quad u_p = \sum_{l,i}\left(u_{p,l,i}\gamma_{p,l,i} + u^\star_{p,l,i}(\tilde{\star}\gamma_{k-p-1,l,i})\right),$$
$$u_{p-1} = \sum_{l,i}\left(u_{p-1,l,i}\gamma_{p-1,l,i} + u^\star_{p-1,l,i}(\tilde{\star}\gamma_{k-p,l,i})\right).$$

Здесь $\gamma_{p,l,i}$ — собственные козамкнутые p-формы оператора $\widetilde{\Delta}$, а двойственные к ним по Ходжу $\tilde{\star}\gamma_{p,l,i}$ — собственные замкнутые $(k-1-p)$-формы. Мы заменим эту норму на эквивалентную ей

$$\|u\|^2_{H^s(S^{k-1};\mathbb{C}^{k(p)})} = \|u\|^2_{L_2(S^{k-1};\mathbb{C}^{k(p)})}$$
$$+ \sum_{l,i} l^{2s}\left\{|u_{p,l,i}|^2 + |u_{p-1,l,i}|^2 + |u^\star_{p,l,i}|^2 + |u^\star_{p-1,l,i}|^2\right\}.$$

В случае $p=0$, то есть для скалярных функций, эта норма имеет вид

$$\|u\|^2_{H^s(S^{k-1})} = \|u\|^2_{L_2(S^{k-1})} + \sum_{l\in\mathbb{Z}_+}\sum_i l^{2s}|u_{l,i}|^2, \quad u(\omega) = \sum_{l,i} u_{l,i}Y_{l,i}(\omega),$$

где $Y_{l,i}$ — $(k-1)$-мерные нормированные в $L_2(S^{k-1})$ сферические функции. В случае $k=2$, $p=1$ она превращается в

$$\|u\|^2_{H^s(S^1;\mathbb{C}^2)} = \|u\|^2_{L_2(S^1;\mathbb{C}^2)} + \sum_{l\in\mathbb{Z}} l^{2s}\left(|u_{0,l}|^2 + |u_{1,l}|^2\right),$$
$$u = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\theta}\left(u_{1,l}\,d\theta, u_{0,l}\right).$$

Через $H^{1/8,1/8}(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)}) = H^{1/8,1/8}(S^{k-1}\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})$ будем обозначать следующее анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|^2_{H^{1/8,1/8}(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})} = \|u\|^2_{L_2(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})} +$$
$$+\sum_{l,i,n}(1+|n_1|^2)^{1/8}(n^2+l^2)^{1/8}\left\{|u_{p,l,i,n}|^2 + |u_{p-1,l,i,n}|^2 + |u^\star_{p,l,i,n}|^2 + |u^\star_{p-1,l,i,n}|^2\right\}, \tag{5.9.6}$$

где

$$u=\left(\sum_{l,i,n}\left\{|\Omega|^{-1/2}e^{iny}\left(u_{p,l,i,n}\gamma_{p,l,i}+u^\star_{p,l,i,n}(\tilde{\star}\gamma_{k-1-p,l,i})\right)\right\},\right.$$

$$\left.\sum_{l,i,n}\left\{|\Omega|^{-1/2}e^{iny}\left(u_{p-1,l,i,n}\gamma_{p-1,l,i}+u^\star_{p-1,l,i,n}(\tilde{\star}\gamma_{k-p,l,i})\right)\right\}\right). \quad (5.9.7)$$

Предложение 5.9.2. *При $d\geqslant 3$ имеет место вложение*

$$H^{1/8,1/8}(S^{k-1}\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})\subset L_{\frac{8d-16}{4d-9}}(S^{k-1}\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)}).$$

Доказательство. Представим Ω в виде произведения $\Omega=\mathbb{T}\times\Omega'$, где

$$\Omega'=\{y_2b_2+\ldots+y_mb_m,\quad 0\leqslant y_i<1\}\subset\mathbb{R}^{m-1}$$

— множество точек $(m-1)$-мерного тора (что соответствует периодическим граничным условиям). Легко видеть, что пространство $H^{1/8,1/8}(S^{k-1}\times\Omega)$ вкладывается в $H^{1/8}(S^1;H^{1/8}(S^{k-1}\times\Omega'))$. Пространство $H^{1/8}(S^{k-1}\times\Omega')$ — это обычное дробное пространство Соболева на компактном $(d-2)$-мерном многообразии без края. Стандартные теоремы вложения (см., например, [49]) дают $H^{1/8}(S^{k-1}\times\Omega')\subset L_{\frac{8d-16}{4d-9}}(S^{k-1}\times\Omega')$. Наконец, заметим, что $H^{1/8}(S^1)\subset L_{8/3}(S^1)\subset L_{\frac{8d-16}{4d-9}}(S^1)$. ■

Доказательство теоремы 5.3.2. С учетом леммы 5.9.1, свойство $B(\frac{8d-16}{4d-9})$ будет следовать из оценки

$$\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\|_{L_{\frac{8d-16}{4d-9}}(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})}\leqslant C\|u\|_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})},\quad \tau>1. \quad (5.9.8)$$

Согласно предложению 5.9.2, достаточно оценить норму

$$\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\|_{H^{1/8,1/8}(S^{k-1}\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})}.$$

Ясно, что

$$\|\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|^2_{H^{1/8,1/8}(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)})}=\left(1+(1+|n_1|^2)^{1/8}(l^2+n^2)^{1/8}\right)\|\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|^2_{L_2(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)})},$$

и функции $\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}$ ортогональны в $H^{1/8,1/8}(\partial U\times\Omega)$. Проведем вычисления, аналогичные (5.9.4), с заменой нормы $L_2(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})$ на $H^{1/8,1/8}(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})$.

$$\||H_0(\tau)|^{-1/2}u\|^2_{H^{1/8,1/8}(\partial U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})}\leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n,l,i,q,c} \left\{ \sum_{\varkappa} \frac{\|\varphi^{(c)}_{p,l,i,\varkappa}\|^2_{H^{1/8,1/8}(\partial U;\mathbb{C}^{k(p)})}}{|h_{l,i,\varkappa,n}(\tau)|} \right\} \|u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})}$$

$$\leqslant C \sup_{n,l,i,q,c} \left\{ \sum_{\varkappa} \frac{\sqrt{\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}}\left[1+(l^2+n^2)^{1/8}(1+|n_1|^2)^{1/8}\right]}{|h_{l,i,\varkappa,n}(\tau)|\left(\sqrt{\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}}-l\right)} \right\} \|u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^{k(p)})}.$$

Таким образом, достаточно оценить сумму в фигурных скобках. Она оценивается через

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}}(1+(l^2+n^2)^{1/8}(1+|n_1|)^{1/4})}{\left(\sqrt{\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}}-l\right)\left(\left||n+\pi b_1+\xi|^2-\tau^2+\lambda^{(c)}_{p,l,\varkappa}\right|+2|\tau\langle n+\pi b_1, b_1\rangle|\right)} \leqslant C$$

снова по лемме 5.8.7 с $a=|n+\pi b_1+\xi|$, $h=\pi(|n_1|+1)$. ∎

Литература

[1] Avron J., Grossmann A., Rodriguez R., *Hamiltonians in one-electron theory of solids*, Reports on Mathematical Physics 5, is. 1 (1974), p. 113–120.

[2] Ашкрофт Н., Мермин Н., *Физика твердого тела*, Т.1. М.: Мир, 1979.

[3] Берг Й., Лёфстрём Й., *Интерполяционные пространства. Введение*, М., Мир, 1980.

[4] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях*, УМН 42 (1987), вып. 6(258), с. 61–76.

[5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом*, Алгебра и Анализ 10 (1998), вып. 4, с. 1–36.

[6] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности*, Алгебра и Анализ 11 (1999), вып. 2, с. 1–40.

[7] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых*, Алгебра и анализ, 12 (2000), вып. 6, 140—177.

[8] Bloch F., *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, Zeitschrift für Physik, Vol. 52 (1929), 7–8, p. 555–600.

[9] Burq N., Gërard P., Tzvetkov N., *Restrictions of the Laplace-Beltrami eigenfunctions to submanifolds*, Duke Math. J. 2007, 138 (3), 445–486.

[10] Ватсон Г., *Теория бесселевых функций*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1949.

[11] Danilov L. I., *On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator*, J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 275204.

[12] Elbert A., Laforgia A., *Monotonicity properties of the zeros of Bessel functions*, SIAM J. Math. Anal. 17 (1986), 1483–1488.

[13] Elbert A., Siafarikas P. D., *On the Zeros of* $aC_\nu(x)+xC'_\nu(x)$, *where* $C_\nu(x)$ *is a Cylinder Function*, J. Math. Anal. Appl. 164 (1992), pp. 21–33.

[14] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, М, Мир, 1972.

[15] Качковский И. В., *Теорема Стейна-Томаса для тора и периодический оператор Шрёдингера с сингулярным потенциалом*, Алгебра и Анализ 24 (2012), вып. 6, с. 124–138.

[16] Качковский И. В., Филонов Н. Д., *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в многомерном цилиндре*, Алгебра и Анализ 21 (2009), вып. 1, с. 133–152.

[17] Качковский И., Филонов Н., *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в слое и в гладком цилиндре*, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 41, Зап. научн. сем. ПОМИ, 385, (2010), с. 69—82.

[18] Киба И., *Абсолютная непрерывность периодического оператора Шрёдингера в волноводе с постоянным сечением*, бакалаврская работа, СПбГУ, физический факультет, 2001.

[19] Kirsten K., *Spectral Functions in Mathematics and Physics*, Chapman & Hall/CRC, 2002.

[20] Kuchment P., *Floquet Theory for Partial Differential Equations*, Birkhauser Verlag, Basel, 1993.

[21] Kuchment P., *The mathematics of photonic crystals*, Math. Modeling in Optical Science, SIAM (2001), p. 207—272.

[22] Kuchment P., Levendorskii S., *On the structure of spectra of periodic elliptic operators*, Trans. AMS 354 (2001), no. 2, pp. 537–569.

[23] Ладыженская О. А., *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, М, Физматлит, 1961.

[24] Ляпунов А., *Общая задача об устойчивости движения*, М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.

[25] Morame A., *The absolute continuity of the spectrum of Maxwell operator in a periodic media*, J. Math. Phys. 41 (2000), p. 7099–7108.

[26] Müller C., *Spherical Harmonics*, Springer, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 17, 1966.

[27] Olver W. J. (ed.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, National Institute of Standarts and Technology, Cambridge University Press, 2010.

[28] Прохоров А, Филонов Н., *О спектре периодического оператора Максвелла в цилиндре*, готовится к печати.

[29] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, М, Мир, 1982.

[30] Shen Z., *On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators*, Intern. Math. Res. Notes (2001), no. 1, p. 1–31.

[31] Smith H. F., Sogge C. D., *On the L_p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary*, Acta Mathematica 198 (2007) no. 1, p. 107–153.

[32] Smith H. F., *Spectral cluster estimates for $C^{1,1}$ metrics*, Amer. J. Math., vol. 128, (2006), 1069–1103.

[33] Sobolev A., *Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator*, Inventiones Mathematicae, vol. 137, is. 1 (1999), p. 85–112.

[34] Sobolev A., Walthoe J., *Absolute continuity in periodic waveguides*, Proc. London Math. Soc. 85 (2002), vol. 3, p. 717–741.

[35] Sobolev A. V., Shargorodsky E., *Quasiconformal mappings and periodic spectral problems in dimension two*, J. Anal. Math. 91 (2003), p. 67–103.

[36] Sogge C. D., *Concerning the L^p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds*, J. Funct. Anal. 77 (1988) no. 1, p. 123–138.

[37] Sogge C. D., *Fourier Integrals in Classical Analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[38] Stein E. M., *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

[39] Suslina T. A., *On the absence of eigenvalues of a periodic matrix Schrödinger operator in a layer*, Russian Journal of Mathematical Physics 8 (2001), no. 4, p. 463–486.

[40] Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность спектра оператора Шрёдингера с потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей*, Алгебра и Анализ 13 (2001), вып. 5, с. 197–240.

[41] Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность спектра магнитного оператора Шрёдингера с метрикой в двумерном периодическом волноводе*, Алгебра и Анализ 14 (2002), вып. 2, с. 159–206.

[42] Suslina T. A., *On the absence of eigenvalues of a periodic matrix Schrödinger operator in a layer*, Russian Journal of Mathematical Physics 8 (2001), no. 4, p. 463–486.

[43] Суслина Т. А., *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Максвелла в слое*, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 32, Зап. научн. сем. ПОМИ, 288 (2002), 232—255.

[44] Temme N., *Special Functions. An introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*, John Wiley & Sons, 1996.

[45] Титчмарш Э. Ч., *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, М., И. Л., 1961.

[46] Тихомиров М., Филонов Н., *Абсолютная непрерывность "четного" периодического оператора Шрёдингера с негладкими коэффициентами*, Алгебра и Анализ 16 (2004), вып. 3, с. 201–210.

[47] Thomas L., *Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal*, Commun. Math. Phys. 33 (1973), p. 335–343.

[48] Tomas P., *A restriction theorem for the Fourier transform*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), no. 2, 477–478.

[49] Трибель Х., *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, М., Мир, 1980.

[50] Figotin A., Kuchment P., *Spectral properties of classical waves in high-contrast periodic media*, SIAM J. Appl. Math. 58 (1998), no. 2, pp. 683–702.

[51] Филонов Н., *Эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме, имеющее решение с компактным носителем*, Пробл. мат. анал., вып. 22, СПбГУ, СПб., 2001.

[52] Filonov N., Sobolev A., *Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals*, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 36, Зап. научн. сем. ПОМИ, 318 (2004), с. 298–307.

[53] Floquet G., *Sur les équations différentielles linéaires á coefficients périodiques*, Annales de l'École Normale Supérieure. 12 (1883), p. 47—88.

[54] Friedlander L., *Absolute continuity of the spectra of periodic waveguides*, Contemp. Math. 339 (2003), p. 37–42.

[55] Friedlander L., *On the spectrum of a class of second order periodic elliptic differential operators*, Communications in Mathematical Physics 229 (2002), p. 49–55 .

[56] Friedrichs, K., *Differential Forms on Riemannian Manifolds*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. VIII (1955), p. 551–590.

[57] Хёрмандер Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том* 1: *Теория распределений и анализ Фурье*, М., Мир, 1986.

[58] Hill G. W., *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*, Acta Math. 8 (1886), p. 1—36.

[59] Штеренберг Р. Г., *Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом*, Исследования по линейным операторам и теории функций. 31, Зап. научн. сем. ПОМИ, 303, (2003), 279—320.