Über die lokale Struktur endlicher Gruppen

Ulrich Meierfrankenfeld

Perspektiven in Algebra und Geometrie

Erlangen

29 April 2003

Gegeben eine endliche Gruppe G.

Wie kann man G identifizieren?

Eine Antwort: Anhand der echten Untergruppen.

Wie findet man echten Untergruppen?

Satz von Sylow: Sei p^k eine Primzahlpotenz, die $|G|$ teilt. Dann gibt es eine Untergruppe der Ordung p^k in G.

Weitere Untergruppen?

Sei P eine p-Unterguppe von G und

$$L = N_G(P) = \{g \in P \mid g^{-1}Pg = P\}$$

Dann heißt L eine p-**lokale Untergruppe** von G.

Beispiel: Sei $G = GL_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper. Außerdem sei $t \in G$ eine Involution, d.h. $|t| = 2$. Dann ist

$$N_G(\langle t \rangle) = C_G(t) = \{g \in G \mid gt = tg\}.$$

Zwei Fälle: $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ und $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2$.

1. Fall: $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$.

Jordansche Normalform von t:

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix}$$

$$C_G(t) = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\}$$

$A \in GL_k(\mathbb{F}), B \in GL_m(\mathbb{F})$

$$C_G(t) \cong GL_k(\mathbb{F}) \times GL_m(\mathbb{F})$$

2. Fall: char $\mathbb{F} = 2$.

Jordansche Normalform von t:

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ I_k & O & I_k \end{pmatrix}\}$$

$$C_G(t) = \{\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ \star & B & 0 \\ \star & \star & A \end{pmatrix}\}$$

$A \in GL_k(\mathbb{F}), B \in GL_m(\mathbb{F})$

Sei $Q = \{\begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ \star & I_m & 0 \\ \star & \star & I_k \end{pmatrix}\}$

Dann ist Q ein Normalteiler von $C_G(t)$, Q ist eine 2-Gruppe und

$$C_G(T)/Q \cong GL_k(\mathbb{F}) \times GL_m(\mathbb{F})$$

In ersten Fall des vorherigen Beispiels nennt man t halbeinfach, im zweiten Fall unipotent. Gruppentheoretisch läßt sich das wie folgt definieren:

Sei p eine Primzahl und P eine p-Untergruppe von G. Setze $L = F^*(C_G(P))$.

Ist L eine p-Gruppe, so heißt P unipotent in G.

Ist $F(L) = Z(L)$, so heißt P halbeinfach in G.

Inzidenzgeometrien

Sie I eine (endliche) Menge. Eine Inzidenzgeometrie über I besteht aus einer Menge

$$\mathcal{G},$$

einer Funktion

$$\tau : \mathcal{G} \to I$$

(genannt Typ) und einer symmetrischen Relation

$$\sim$$

(genannt Inzidenz), so dass zwei Element von gleichen Typ nie inzident sind.

Beispiel:

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, $\mathcal{G}$ die Menge der echte Unterräume, $\tau = \dim$ und $A \sim B$ falls $A < B$ oder $B < A$. $\mathcal{G}$ ist dann also der zu V gehörige projektive Raum $Proj(V)$.

Die unipotente Geometrie

Sei p eine Primzahl, so dass G unipotente p-Untergruppen besitzt. Eine Borelgruppe von G ist der Normalizator einer maximalen unipotenten Untergruppe von G.

Eine Untergruppe L von G heißt parabolisch falls

(i) $L = N_G(U)$ für eine unipotente Untergruppe U von G.

(ii) L enthält eine Borelgruppe von G.

Zwei parabolische Untergruppen heißen inzident, falls ihr Durchschnitt wieder parabolisch ist.

Die unipotente Geometrie von G ist die Menge der maximalen parabolischen Untergruppen zusammen mit der obigen Inzidenzrelation.

Beispiel: Sei wieder $G = GL_{\mathbb{F}}(V)$, wobei $\mathbb{F}$ eine endlicher Körper and V ein endlich dimensionaler Vektorraum über V ist.

Sei $p = \operatorname{char} \mathbb{F}$. Jede p-Untergruppe von G ist dann unipotent. Sei U eine unipotente Untergruppe. Dann ist $W := C_V(U) \neq 0$ und $N_G(U) \leq N_G(W)$.

Damit sind die maximalen parabolischen Untergruppen gerade die Normalizatoren der echten Unterräume von V. Zwei maximale Parabolische sind inzident genau dann, wenn die entsprechenden Unteräume ineinander enthalten sind.

Also ist die unipotente Geometrie von $\mathrm{GL}_{\mathbb{F}}(V)$ genau der zu V gehörige projektive Raum.

Halbeinfache Geometrien

Wir betrachten halbeinfache Geometrien nur am Beispiel $GL_{\mathbb{F}}(V)$.

Sei p eine Primzahl, so dass $\mathbb{F}$ eine p-te Einheitswurzel enthält. Sei t ein Element der Ordnung p in G. Dann ist

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$$

die direkte Summe der Eigenräume von t und

$$C_G(t) = GL_{\mathbb{F}}(V_1) \times GL_{\mathbb{F}}(V_2) \times \ldots GL_{\mathbb{F}}(V_m).$$

Die maximalen Objekte der halbeinfachen Geometrie entsprechen in diesem Beispiel den Paaren (V_1, V_2) von Unterräumen mit $V = V_1 \oplus V_2$. Und (V_1, V_2) ist inzident mit (W_1, W_2) falls V_1 mit W_1, und V_2 mit W_2 inzident ist.

Ein etwas allgemeineres **Beispiel:**

Sei G eine Gruppe von Lie-Typ definiert über einen endlichen Körper $\mathbb{F}$.

1. Sei $p = \operatorname{char} \mathbb{F}$. Dann ist die unipotente Geometrie von G gerade das zu G gehörende Gebäude.

2. Sei p ein Primteiler von $|\mathbb{F}| - 1$. Dann besteht die halbeinfache Geometrie von G aus all den Paaren (a, b), wobei a und b gegenüberliegende Elemente des Gebäudes sind.

Gegeben eine Inzidengeometrie $\mathcal{G}$. Wie kann man $\mathcal{G}$ idenifizieren?

Fahne in $\mathcal{G}$: eine Teilmenge $\mathcal{F}$, so dass je zwei verschiedene Elemente von $\mathcal{F}$ inzident sind.

$\tau(\mathcal{F})$ nennt man den Typ $\mathcal{F}$. Eine Fahne kann hoechstens sowiele Elemente enthalten wie es Typen gibt.

Residium einer Fahne $\mathcal{F}$ vom Typ J:

$$Res_{\mathcal{F}} = \{a \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \cup \{a\} \text{ ist eine Fahne}\}.$$

$Res_{\mathcal{F}}$ ist eine Inzidenzgeometrie über $I \setminus J$.

Diagramm von $\mathcal{F}$:

$$(Res_a \mid a \in \mathcal{F}) \text{ (modulo Isomorphismen)}$$

Diagramm von $\mathcal{G}$: Diagramm einer maximalen Fahne (nicht notwendig eindeutig)

Beispiel: projektiver Raum

Maximale Fahne: $(n+1 = \dim V)$

$$0 < V_1 < V_2 < \ldots V_n < V.$$

$$Res_W = Proj(W) \cup Proj(V/W).$$

Diagramm einer projektiven Ebene:

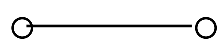
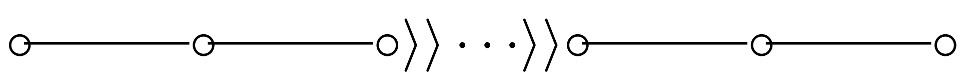


Diagramm eines projektiven Raumes:



Oft ist eine Geometrie durch ihr Diagramm bestimmt.

Satz: Zwei spherische Gebäude vom Rank mindestens 4 und gleichem Diagramm sind isomorph.

Wie kann man das Diagramm der parabolische Geometrie bestimmen?

Sei B eine Borelgruppe von G.

Definiere

$\mathcal{F} = \{M \mid B \leq M, M$ maximale Parabolische$\}$

Dann ist $\mathcal{F}$ eine maximale Fahne der Parabolische Geometrie.

Sei $M \in \mathcal{F}$ und L eine Parabolische inzident mit L. Dann ist $M \cap L$ eine Parabolische von M. Damit gilt $O_p(M) \leq M \cap L$ und $M \cap L/O_p(M)$ ist (im allgemeinen) eine Parabolische von $M \cap L/O_p(M)$. Also

$$Res_M$$

$$\leftrightarrow$$

parabolische Geometrie von$M/O_p(M)$

Also ist Kenntnis des Diagrammes mehr oder weniger äquivalent zur Kenntnis von $M/O_p(M)$ für alle maximalen parabolischen Untergruppen M von G.

Kurze Zusammenfassung:

Wie kann man eine gegebene endlichen Gruppe identifizieren:

Schritt 1: Definiere eine gegeignete Geometrie auf der die Gruppe operiert.

Schritt 2: Bestimme das Diagramm der Geometrie.

Schritt 3: Identifiziere die Geometrie anhand des Diagrammes.

Schritt 2 wird fast immer rein gruppentheoretisch durchgeführt.

Offene Frage: Gibt es geometrische Methoden, die bei der Bestimmung der Diagramme geeigneter Geometrien der endlichen einfachen Gruppen hilfreich seien könnten?